

# Diskret analys

En studie av polynom och talföljder med tillämpningar i interpolation

$$\begin{array}{ccccccc} p(x+1) & & p(x+2) & & p(x+3) & & p(x+4) \\ & d_1^p(x+1) & & d_1^p(x+2) & & d_1^p(x+3) & \\ & & d_2^p(x+1) & & d_2^p(x+2) & & \\ & & & d_3^p(x+1) & & & \end{array}$$

**Tomas Nilson**

# DISKRET ANALYS

TOMAS NILSON

SAMMANFATTNING. Mot  $n + 1$  distinkta punkter svarar ett entydigt polynom i  $\mathcal{P}_n$ . En följd kan alltså i viss mening representera ett polynom och omvänt. Vi studerar denna korrespondens genom att låta polynoma talföljder generera differensstabeller där vi då har följder som representerar relaterade polynom. Ur detta kan vi sedan dra en del slutsatser som man bland annat kan ha nytta av då man ska interpolera. En viktig roll spelas av differenspolynomen, dessa kan man se som en diskret form av derivata och vi ska också betrakta summapolynom vilka på motsvarande sätt liknar integraler.

## INNEHÅLL

1. Introduktion	3
2. Interpolation	4
2.1. Några kända interpolationsmetoder	5
3. Polynoma talföljder och differenspolynom	12
3.1. Grundläggande definitioner och resultat	12
3.2. Några speciella följder	16
3.3. Mer från differensstabeller	18
3.4. Vi fixerar en differensdiagonal	24
3.5. Diagonalen som linjärkombination	28
3.6. Differenspolynom och derivata	31
4. Diskret integration	38
4.1. Summapolynom	38
4.2. Koefficienter till summapolynom	41
4.3. Några egenskaper för summor	45
5. Härifrån och vidare	49
5.1. Några lösa trådar	49
5.2. Umbral calculus?	49
6. Tack	50
7. Lista över symboler	51
8. Litteraturlista	52

## 1. INTRODUKTION

Denna uppsats är sprungen ur en enkel iakttagelse. Låt oss skriva upp en talföljd given av något polynom  $f(x)$  då  $x = 1, 2, \dots, 6$  och se på den förutsättningslöst.

1    3    9    19    33    51

Antag att vi t.ex vill gissa ett polynom som ger följderna utan någon kännedom om interpolationsformler eller dylikt. En idé är då att betrakta differenser av två på varandra följande tal, vi har t.ex att  $3 - 1 = 2$ ,  $9 - 3 = 6$ .

1    3    9    19    33    51  
      2    6    10    14    18

Det här verkar spännande, vi fortsätter

1    3    9    19    33    51  
      2    6    10    14    18  
          4    4    4    4

Vi får en konstant differens! Varför blev det just 4? Vad betyder det att den konstanta differensen infann sig på rad 2? Frågorna hopar sig snabbt och även om man kan ana svaren på de här första leder det direkt vidare till lite krångligare följdfrågor. Denna uppsats är tillkommen för att formulera, utforska och svara på sådana frågor.

Eftersom vårt arbete här är intimt förknippat med interpolation ska vi först ägna kapitel 2 till att reda ut vad interpolation är och presentera några kända interpolationsmetoder. Vi ska se på hur och varför de fungerar och även göra några jämförelser dem emellan. Observera dock att vi inte strävar efter vare sig att lista alla kända metoder eller ens studera dem uttömmande, vi vill bara ha lite kött på benen rörande interpolation.

I kapitel 3 tar vi itu med polynoma talföljder. Som vi såg i det inledande exemplet får vi differensalföljder som i sin tur ges av polynom vilka man kan se som en diskret form av derivata. Alla dessa polynom är då relaterade till varandra, de är fixerade i en struktur som vi kan kartlägga. Detta ger oss verktyg för att studera polynom och talföljder vilket vi t.ex kan använda för att interpolera. När det sen gäller sökandet efter interpolationsmetoder följer vi två vägar. Dels att kunna formulera ett uttryck för interpolerande polynom i sin helhet och dels att lösa ut dessa polynoms koefficienter explicit.

Kapitel 4 ägnas åt en motsatsen till differenspolynom, d.v.s summapolynom. Detta kan man se som ett slags diskret integration. Här har vi direkt ett område som inte är interpolation där vi får användning för våra resultat från kapitel 3.

Vi avslutar med att ta upp några problem man kan fundera vidare över samt spekulerar över var i matematiken detta arbete hör hemma. För övrigt kan vi nämna att litteraturlistan längst bak inte är en referenslista utan bara en lista över böcker som varit till nytta.

Polynom är välkända objekt och matematiken här är oftast enkel så uppsatsen bör kunna läsas av studenter på relativt låg nivå. Förhoppningsvis har den också något att ge mer avancerade läsare.

## 2. INTERPOLATION

Även om denna uppsats främst handlar om polynom och talföljder kommer vi att syssla en hel del med interpolation. Därför ska vi i detta kapitel bekanta oss lite med interpolation och se på några kända interpolationsmetoder. Eftersom begreppet kan rymma mycket begränsar vi oss här till det som intresserar oss just nu och som kanske också är det vanligaste interpolationsproblemet, nämligen att finna en väldefinierad reell funktion som interpolerar en datamängd i form av punkter.

**Definition 2.1.** Låt  $J \subseteq \mathbb{R}$  vara intervall och  $I \subseteq \mathbb{N}$  vara indexmängd. Antag att vi har datamängd  $\mathcal{D} = \{(x_k, y_k) : x_k \in J, y_k \in \mathbb{R}, k \in I\}$ . En funktion  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  sägs **interpolera**  $\mathcal{D}$  om  $g(x_k) = y_k \forall k \in I$ .

Låt oss se på ett exempel där vi avsiktligt är lite slarviga.

*Exempel 1.* Datamängden  $\mathcal{D} = \{(-1, -1), (1, 1)\}$  kan t.ex ges av

$$\begin{aligned} g(x) &= x \\ h(x) &= x^3 - 2x^2 + 2 \\ i(x) &= \frac{1}{x} \\ q(x) &= x^x \end{aligned}$$

Observera att vi här inte angivit definitionsmängder, funktionsuttrycken har bara det gemensamt att deras grafer innehåller  $\mathcal{D}$ , t.ex  $g(1) = h(1) = i(1) = q(1) = 1$ .

Vi ser att  $i$  inte uppfyller definitionen då  $i$  inte är definierad i  $x = 0$ . Ännu värre är det med  $q$  som bara kan definieras punktvis för  $x < 0$ . Däremot är  $g$  och  $h$  helt godtagbara, de är polynom och från och med nu ska vi bara se på interpolation med polynom. Vi får då anledning att betrakta vektorrummet  $\mathcal{P}_n$ .

**Definition 2.2.** Vektorrummet  $\mathcal{P}_n$  består av alla polynom med reella koefficienter som är av grad  $\leq n$ .

*Anmärkning 1.* Eftersom varje polynom i  $\mathcal{P}_n$  på ett entydigt sätt kan skrivas som en linjärkombination av polynomen  $1, x, x^2, \dots, x^n$ , så utgör dessa polynom en bas för  $\mathcal{P}_n$ .

Att polynom är lätthanterliga är inte enda orsaken till att man gärna interpolerar med dem. De har en egenskap som vi nu formulerar i en sats vilken man kan se som huvudsats inom området polynominterpolation.

**Sats 2.1.** *Givet  $n + 1$  distinkta punkter  $(x_k, f(x_k)), k = 0, 1, \dots, n$  så finns det ett entydigt polynom  $p \in \mathcal{P}_n$  som interpolerar dessa.*

Hur kan visa detta återkommer vi till i anmärkning 2. Observera att dessa punkter som vi oftast anger med  $f(x_k)$  inte måste ges av känd funktion. Med distinkta menar vi här normalt att  $x_i$  är distinkta men sats 2.1 kan omformuleras så att vi kan byta ut punkter mot derivator. Det entydiga polynomet i  $\mathcal{P}_n$  finns om vi har  $n$  punkter och derivatan i en av dessa punkter och vi ska längre fram se på Taylorpolynom där vi har en punkt och  $n$  derivator i denna punkt, se exempel 7.

**2.1. Några kända interpolationsmetoder.** Vi ska se på fyra kända metoder och börjar med Newtons interpolationsformel. För oss är den särskilt intressant eftersom den tar hänsyn till differenser i en talföljd och vi får anledning att återkomma till den längre fram.

**Beskrivning 1. Newtons interpolationsformel.**

Givet  $n + 1$  punkter som vi betecknar  $f(x_0), \dots, f(x_n)$ . Finn polynom  $p(x)$  som interpolerar dessa. Newtons interpolationsformel ger då

$$p(x) = f(x_0) + \Delta_1(x_0, x_1)(x - x_0) + \Delta_2(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \Delta_n(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$$

där den dividerade differensen  $\Delta_k(x_0, x_1, \dots, x_k)$  definieras rekursivt enligt

$$\begin{cases} \Delta_1(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ \Delta_k(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta_{k-1}(x_1, x_2, \dots, x_k) - \Delta_{k-1}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})}{x_k - x_0} \quad k \geq 2. \end{cases}$$

*Exempel 2.* Använd Newtons interpolationsformel för att finna polynom  $p(x)$  som interpolerar punkterna  $f(1) = 3, f(3) = 13, f(4) = 24$ .

Lösning: Vi har 3 punkter och ansätter då ett andragspolynom.

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) + \Delta_1(x_0, x_1)(x - x_0) + \Delta_2(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) = \\ &= 3 + \frac{13 - 3}{3 - 1}(x - 1) + \frac{\frac{24 - 13}{4 - 3} - \frac{13 - 3}{3 - 1}}{4 - 1}(x - 1)(x - 3) = \\ &= 3 + 5(x - 1) + 2(x - 1)(x - 3) = 2x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$

Alltså,  $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ .

I kapitel 3 återkommer vi till Newtons interpolationsformel och visar den då för det specialfall som är intressant för oss och går nu vidare med en interpolationsformel från slutet av 1700-talet.

**Beskrivning 2. Lagrange interpolationsformel.**

Givet punkter  $f(x_0), \dots, f(x_n)$ . Finn polynom  $p(x)$  som interpolerar dessa. Lagrange interpolationsformel ger då att

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x)$$

där Lagrangepolynomen  $L_k(x)$  fås ur

$$L_k(x) = \prod_{\substack{j \in \{0,1,\dots,n\} \\ j \neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

*Exempel 3.* Använd Lagrangenterpolationsformel för att finna polynom  $p(x)$  som ger punkter  $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 17, f(4) = 43$ .

Lösning: Vi har 4 punkter som vi sätter in interpolationsformeln.

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^3 f(x_k)L_k(x) = 1 \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 5 \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} + \\ &\quad + 17 \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 43 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} = \\ &= 1 \frac{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}{-6} + 5 \frac{x^3 - 8x^2 + 19x - 12}{2} + 17 \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{-2} + \\ &\quad + 43 \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{6} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \end{aligned}$$

så vi har  $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ .

Exempel 3 låter oss ana varför metoden fungerar men vi vill visa att de  $n + 1$  första Lagrangepolynomen verkligen utgör en bas för  $\mathcal{P}_n$ . Först formulerar vi ett lemma som säger att vid insättning av  $x_k$  blir rätt Lagrangepolynom 1 medan de andra blir 0.

**Lemma 2.2.** *Lagrangepolynomen  $L_k$  uppfyller*

$$L_k(x_j) = \delta_k^j$$

där  $\delta_k^j$  är Kroneckers delta, d.v.s

$$\delta_k^j = \begin{cases} 1 & \text{om } j = k \\ 0 & \text{annars} \end{cases} .$$

*Bevis.* Om  $j \neq k$  så finns en faktor  $x - x_j$  i  $L_k(x_j)$  så att  $L_k(x_j) = 0$  och om  $j = k$  får vi

$$L_k(x_k) = \prod_{\substack{j \in \{0,1,\dots,n\} \\ j \neq k}} \frac{x_k - x_j}{x_k - x_j} = 1.$$

□

Sedan formulerar vi ett lemma som säger att  $f$  och  $p$  överensstämmer i alla  $n + 1$  punkter.

**Lemma 2.3.** *Låt  $p(x)$  vara polynomet som m.h.a Lagrange interpolationsformel interpolerar datamängden  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Då gäller att  $p(x_k) = f(x_k)$  för  $k = 0, 1, \dots, n$ .*

*Bevis.* Av Lemma 2.2 följer att

$$p(x_k) = \sum_{j=0}^n f(x_j)L_j(x_k) = \sum_{j=0}^n f(x_j)\delta_k^j = f(x_k).$$

□

**Proposition 2.4.** *Lagrangepolynomen  $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$  utgör en bas för  $\mathcal{P}_n$ .*

*Bevis.* Vi vet att  $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$  och det vi behöver visa är att  $\{L_0, L_1, \dots, L_n\}$  spänner  $\mathcal{P}_n$ .

Tag godtyckligt polynom  $p \in \mathcal{P}_n$  och  $n+1$  distinkta punkter  $x_k, k = 0, 1, \dots, n$ . Av lemma 2.3 följer då att Lagrange interpolationsformel ger ett polynom  $q \in \mathcal{P}_n$  som är en linjärkombination av  $L_0, L_1, \dots, L_n$  så att  $q(x_k) = p(x_k), \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Av sats 2.1 följer då att  $p = q$  p.g.a entydighet. □

### Beskrivning 3. Direkt interpolation.

En metod där man omgående kan sätta upp ett ekvationssystem och lösa ut ett interpolerande polynoms koefficienter kallar vi direkt interpolation.

Låt  $f$  vara polynom av grad  $n$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Antag att vi studerar  $f$  i  $n + 1$  punkter,  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ . Vi får då ett ekvationssystem med  $n + 1$  ekvationer och detta kan vi skriva på matrisform.

$$\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0^0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1^0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}$$

Vi betecknar matriserna i ekvationen ovan med  $v = Ac$ . Antag tills vidare att  $A$  är inverterbar, då kan vi bestämma koefficienterna i  $f(x)$  genom  $c = A^{-1}v$ .

*Exempel 4.* Bestäm ett polynom  $p(x)$  som interpolerar följande punkter,  $f(1) = 2$ ,  $f(2) = 10$ ,  $f(3) = 40$ ,  $f(4) = 104$ .

Givet 4 punkter ansätter vi polynom av grad 3. Detta skriver vi på matrisform  $v = Ac$  och löser sedan ut  $c$ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 40 \\ 104 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 40 \\ 104 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{6} & -4 & \frac{7}{2} & -1 \\ -\frac{13}{3} & \frac{19}{2} & -7 & \frac{11}{6} \\ 4 & -6 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 40 \\ 104 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi får att  $p(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 4$ .

Vi har m.h.a obevisade sats 2.1 visat att Lagrangepolynomen utgör en bas för  $\mathcal{P}_n$ . Vi ska nu argumentera för att  $A$ :s inverterbarhet ger sats 2.1.

*Anmärkning 2.* Påståendet i sats 2.1 kan uttryckas som följer.

Låt  $p$  vara polynom i  $\mathcal{P}_n$ . Då ger  $p$  en datamängd av  $n + 1$  distinkta punkter som inget annat polynom i  $\mathcal{P}_n$  ger.

Detta jämför vi med direkt interpolation där vi har  $v = Ac$ . Att  $A$  är inverterbar och att vi kan skriva  $c = A^{-1}v$  implicerar då sats 2.1 eftersom detta betyder att polynomet  $p$  som beskrivs av  $c$  bestäms av datamängden som beskrivs av  $v$ .

$A$ :s inverterbarhet är nu viktig för oss. Vi visar den för specialfall i observation 6 men vill ändå argumentera för hur man skulle kunna visa den allmänt. Vi gör detta genom att först se på ett exempel och sedan anlägga ett vidare perspektiv.

*Exempel 5.* Visa att  $4 \times 4$ -matrisen  $A$  vid direkt interpolation är inverterbar.

Vi vill genom radoperationer reducera  $A$  till identitetsmatrisen och börjar med att dra rad 1 från rad 2 och från rad 3.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 - x_0^3 & x_1^2 - x_0^2 & x_1 - x_0 & 0 \\ x_2^3 - x_0^3 & x_2^2 - x_0^2 & x_2 - x_0 & 0 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ (x_1 - x_0)(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) & x_1 - x_0 & 0 \\ (x_2 - x_0)(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2) & (x_2 - x_0)(x_2 + x_0) & x_2 - x_0 & 0 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dividera nu rad 2 med  $x_1 - x_0$  och rad 3 med  $x_2 - x_0$ . Drag därefter rad 2 från rad 3, matrisen får då följande utseende

$$\begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2 & (x_1 + x_0) & 1 & 0 \\ x_2^2 - x_1^2 + x_0(x_2 - x_1) & (x_2 - x_1) & 0 & 0 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2 & (x_1 + x_0) & 1 & 0 \\ x_2 + x_1 + x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi inser att vi kan reducera den fjärde raden så att den liknar den tredje varvid vi får

$$\begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2 & (x_1 + x_0) & 1 & 0 \\ x_2 + x_1 + x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 + x_2 + x_1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2 & (x_1 + x_0) & 1 & 0 \\ x_2 + x_1 + x_0 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 - x_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

där den sista operationen var att dra rad 3 från rad 4. Eftersom  $x_3 \neq x_0$  är matrisen triangulär med alla diagonalelement  $\neq 0$  och därmed inverterbar.

Varför skulle detta fungera allmänt? Låt  $r_j$  beteckna rad  $j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . När vi drar en ursprunglig rad  $r_i$  från  $r_k$  kan vi alltid i varje nollskild position lösa ut en faktor  $x_k - x_i$ . Vi ser på en position på rad  $r_k$ .

$$x_k^n - x_i^n = (x_k - x_i) \sum_{j=0}^{n-1} x_k^{n-1-j} x_i^j$$

Denna rad delar vi med  $x_k - x_i$  vilket ger att vi på en position, den som var av grad 1 kommer att få 1. I nästa steg har vi två sådana uttryck där  $x_i$  är gemensam. Vi drar den ena raden från den andra och får i vår position

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_k^{n-1-j} x_i^j - \sum_{j=0}^{n-1} x_m^{n-1-j} x_i^j = \sum_{j=0}^{n-1} x_i^j (x_k^{n-1-j} - x_m^{n-1-j}).$$

Vi ser att  $x_k - x_m$  delar detta och får då efter division en position att bli 1. Så här fortsätter man tills diagonalelementen alla är 1 och matrisen är triangulär och då inverterbar. Observera att detta bara är en antydning om hur man skulle kunna visa  $A$ 's inverterbarhet mekaniskt eventuellt m.h.a induktion och inte något bevisförsök. Att  $A$  är allmänt inverterbar och då att sats 2.1 gäller får vi tro på och det specialfall vi behöver för egna resultat visar vi i kapitel 3.

I exempel 4 har vi inte redovisat beräkningar för att invertera matrisen. För stora matriser kan det arbetet bli omfattande varför metoden lämpar sig bäst då matrisen kan återanvändas.  $A^{-1}$  verkar för övrigt bekant. När man ser närmare

efter verkar den överensstämma med Lagrangepolynomen för grad 3, se exempel 3. Man kan fråga sig om detta gäller allmänt för grad  $n$  och svaret är ja.

*Observation 1.* Lagrangeinterpolation och direkt interpolation är i grunden samma sak. Antag att vi har datamängd  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  och låt  $p$  vara polynom av högst grad  $n$  som interpolerar denna. Vi inför då beteckningar på matriser.

$$v = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$L = [L_0 \quad L_1 \quad \dots \quad L_n]$$

$$c = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix}$$

$$s = [x^n \quad x^{n-1} \quad \dots \quad 1]$$

$$A = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0^0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1^0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n^0 \end{bmatrix}$$

Vi kan bestämma polynom  $p$  med Lagrange interpolationsformel.

$$(1) \quad Lv = p$$

Vi vet också att  $sc = p$  och att  $Ac = v$ . Detta sätter vi in i ekvation (1) och får

$$LAc = sc.$$

Då detta gäller för alla  $c$  så har vi  $LA = s$ . Eftersom  $L$  och  $s$  båda är baser för  $\mathcal{P}_n$  har vi att  $A$  är en basbytesmatris. Så  $L = sA^{-1}$  och vi ser att överensstämmelsen är allmän.

I de interpolationsmetoder vi betraktat så här långt har datamängden utgjorts av  $n + 1$  distinkta punkter. Som vi tidigare nämnt kan man byta ut punkter mot t.ex derivator i en punkt och vi skulle kunna ställas inför följande interpolationsproblem.

*Exempel 6.* Givet  $f(1) = 3, f'(1) = 1, f''(1) = 4$ . Finns det någon funktion  $p$  som interpolerar denna datamängd?

Ja,  $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$  interpolerar.

Vi ska nu se på Taylorpolynom som just tar hand om datamängden en punkt och  $n$  derivator i denna punkt.

**Beskrivning 4. Taylorpolynom.**

Antag att vi känner ett funktionsvärde  $f(x_0)$  samt alla  $f^{(j)}(x_0)$ ,  $1 \leq j \leq n$  och att dessa derivator alla är kontinuerliga på ett öppet intervall  $I$  som innehåller  $x_0$ . Då kan vi approximera  $f$  på  $I$  med  $n$ :te Taylorpolynomet  $T_n$

$$f(x) \approx T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Detta vilar på Taylors sats som också ger oss möjlighet att uppskatta felet i approximationen.

**Sats 2.5. Taylors sats.**

Låt  $n \in \mathbb{N}$ , låt  $I := [a, b]$  och låt  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  vara sådan att  $f, f', \dots, f^{(n)}$  är kontinuerliga på  $I$  och  $f^{(n+1)}$  existerar på  $]a, b[$ . Om  $x_0 \in I$  då finns det för varje  $x$  på  $I$  en punkt  $c$  mellan  $x$  och  $x_0$  så att

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

*Anmärkning 3.* Låt  $T_n$  beteckna  $n$ :te Taylorpolynomet för  $f$  i  $x_0$ . Då kan vi skriva

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

där  $R_n(x)$  ges av

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

för någon punkt  $c$  mellan  $x$  och  $x_0$ .  $R_n$  kan då användas för att uppskatta felet i en approximation. Just denna form av  $R_n$  kallas Lagrangerest.

Taylors sats är välkänd och visas i så gott som alla analysböcker varför vi utelämnar beviset här. När man använder Taylorpolynom  $T$  får man en approximation av funktion  $f$  nära en punkt. Man kan se det som att graferna för  $f$  och  $T$  nära nog sammanfaller i närheten av denna punkt. För t.ex Lagrangeinterpolation har vi i stället att vissa punkter är lika medan graferna aldrig behöver likna varandra. Vi ska se på ett exempel som belyser detta.

*Exempel 7.* Bestäm Taylorpolynom  $T_3$  runt  $x = 1$  för datamängden  $f(1) = 1$ ,  $f'(1) = -4$ ,  $f''(1) = 24$ ,  $f^{(3)}(1) = -30$ .

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x - 1)^3 = \\ &= 1 - 4(x - 1) + \frac{24}{2!}(x - 1)^2 - \frac{30}{6!}(x - 1)^3 = -5x^3 + 27x^2 - 43x + 22. \end{aligned}$$

Antag vidare att  $f(x) = x^4 - 9x^3 + 33x^2 - 47x + 23$ ,  $f$  uppfyller datamängden. Graferna för  $T_3$  och  $f$  kommer att ligga nära varandra runt  $x = 1$  men för övrigt behöver de inte likna varandra, t.ex har vi att  $f(5) = 113$  medan  $T_3(5) = -143$ . Betrakta nu talföljd som  $f$  ger,  $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 17, f(4) = 43$ . Denna talföljd har vi tidigare interpolerat m.h.a Lagrange interpolationsformel och fick då  $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ . Som synes är  $p$  och  $T_3$  olika, de har inte samma uppgift. Man kan tillägga att om vi haft tillgång till en punkt till ur talföljden  $f$  för att bestämma  $p$  och en derivata till för att bestämma  $T$  så hade vi fått att  $f = p = T$  eftersom  $f$  är ett fjärdegradspolynom.

*Anmärkning 4.* Eftersom Taylorpolynom ofta används för att approximera kan det vara lätt att röra ihop begreppen. I exempel 6 var det helt klart att vi interpolerade en datamängd. Detsamma gjorde vi i exempel 7 men här jämförde vi med Lagrangeinterpolation varför vi underströk den approximativa aspekten.

### 3. POLYNOMA TALFÖLJDER OCH DIFFERENSPOLYNOM

Från kapitel 2 vet vi att givet  $n + 1$  punkter kan vi bestämma entydigt polynom i  $\mathcal{P}_n$  som interpolerar och vi har sedan länge metoder för att klara detta. En datamängd kan alltså i viss mening representera ett polynom och tvärtom. Vi ska nu studera denna korrespondens genom att se på talföljder och differensalföljder som i sin tur kan representeras av polynom. På så sätt får vi en struktur vi kan kartlägga och sedan använda för att t.ex se på egenskaper hos polynom. I introduktionen såg vi på en talföljd med differenser.

1	3	9	19	33	51
	2	6	10	14	18
	4	4	4	4	

Vi använder kapitel 3.1 till att definiera sådana följder och polynom samt att undersöka vad den konstanta raden betyder. Den kommer att ge oss lite fast mark på vilken vi kan bygga vidare. I kapitel 3.3 samlar vi egenskaper och utvecklar metoder för att räkna med elementen i tabellen. För att få ytterligare fäste fixerar vi i kapitel 3.4 en diagonal i tabellen och till sist undersöker vi i kapitel 3.6 hur dessa differenser är relaterade till derivata. Eftersom detta kapitel i sin helhet till stor del handlar om kartläggning består det av en blandning av mer eller mindre triviala resultat. Tillsammans blir de många och kapitlet långt varför det inte är ämnat att sträckläsas.

**3.1. Grundläggande definitioner och resultat.** För att åskådliggöra talföljder och differenser kommer vi att använda *differenstabeller*. Låt oss se på en sådan innan vi definierar innehållet.

*Exempel 8.* Låt  $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 9, f(4) = 19, f(5) = 33$ . Vi vill ha med alla punkter  $(x_k, f(x_k))$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ , samt differenser av dessa värden  $f(x_k)$  varför vi gör en differenstabell.

$x =$	1	2	3	4	5
$f(x) =$	1	3	9	19	33
$d_1^f =$	2	6	10	14	
$d_2^f =$	4	4	4		

Talföljden börjar då  $x = 1$ . Vi får värden av  $f$  då  $x = 1, 2, \dots, 5$  och säger då att vi har steglängd 1. Vidare anger vi differensrad med  $d_1^f$  och  $d_2^f$ , dessa följder kommer också att ges av polynom. Denna tabell innehåller element ur  $\mathbb{R}$  men längre fram ska vi också använda tabell för element ur  $\mathbb{R}[x]$ .

**Definition 3.1.** Låt  $p$  vara polynom. Den **polynoma talföljden** till  $p$  med parametrar  $(b, s, m)$  där  $b \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$  är sekvensen

$$(p(b + js))_{j=0}^m .$$

*Exempel 9.* Vi skriver ut den polynoma talföljden som ges av  $p(x) = x^2 - 3x + 5$  med parametrar  $(b, s, m) = (4, 2, 3)$ .

$x =$	4	6	8	10
$p(x) =$	9	23	45	75

*Anmärkning 5.* I denna uppsats låter vi steglängden  $s = 1$  och begynnelse  $b \in \mathbb{Z}$  och resultaten är formulerade för dessa förutsättningar. Observera dock att man alltid kan transformera från det allmänna fallet till vårt specialfall. Hur man gör detta ser vi på i anmärkning 9.

*Anmärkning 6.* Ibland kommer vi att skriva *talföljd med konstant steglängd*. Detta är för att markera att följderna inte behöver ges av ett polynom. Då vi har  $n + 1$  punkter och bara betraktar polynom i  $\mathcal{P}_n$  är detta ändå samma sak.

**Definition 3.2.** Låt  $p$  vara polynom. **Differenspolynom**  $d_i^p$  ges då rekursivt av

$$d_i^p(x) = \begin{cases} p(x) & , i = 0 \\ d_{i-1}^p(x+1) - d_{i-1}^p(x) & , i \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

*Anmärkning 7.* Operatoren  $d$  är linjär, d.v.s för två polynom  $p$  och  $f$  gäller att  $d_1^{p+f} = d_1^p + d_1^f$  och även att  $d_1^{cf} = cd_1^f$  där  $c$  är en konstant.

*Exempel 10.* Bestäm differenspolynomen  $d_1^p$  och  $d_2^p$  till  $p(x) = x^2$ . Vi gör först en differensstabell med parametrar  $(b, s, m) = (1, 1, 4)$  för att åskådliggöra.

$x =$	1	2	3	4	5
$p(x) =$	1	4	9	16	25
$d_1^p =$	3	5	7	9	
$d_2^p =$	2	2	2		

Sedan beräknar vi

$$\begin{cases} d_1^p(x) = p(x+1) - p(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1 \\ d_2^p(x) = d_1^p(x+1) - d_1^p(x) = 2(x+1) + 1 - (2x+1) = 2 \end{cases}$$

och kan i tabellen kontrollera att  $d_1^p(x) = 2x+1$  ger den första differensföljden samt att  $d_2^p(x) = 2$  ger den andra.

Den första iakttagelsen rörande polynoma talföljder i introduktionen gav upphov till några frågor. Har alla polynoma talföljder en differensrad som är konstant? Vilken konstant är det i så fall och på vilken rad infinner den sig?

**Lemma 3.1.** *Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$  med högstgradsterm  $a_n x^n$ . Då är  $d_1^p$  ett polynom av grad  $n-1$  med högstgradsterm  $na_n x^{n-1}$ .*

*Bevis.* Låt  $p$  vara polynom med  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ , då har vi att

$$\begin{aligned} d_1^p(x) &= p(x+1) - p(x) = \\ &= a_n((x+1)^n - x^n) + a_{n-1}((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + \dots + a_0 - a_0 = \\ &= a_n \left( \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} x^0 \right) + \\ &+ a_{n-1} \left( \binom{n-1}{1} x^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{n-1} x^0 \right) + \dots + a_0 - a_0 = na_n x^{n-1} + R \end{aligned}$$

där  $R$  består av alla termer av grad  $n-2$  och lägre. □

**Sats 3.2.** *Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Då gäller att*

- $d_n^p$  är konstant
- $d_n^p = p^{(n)}$

*Bevis.* Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Vi använder lemma 3.1 rekursivt. Då är  $d_n^p$  polynom av grad 0, d.v.s konstant med  $d_n^p = n!a_n = p^{(n)}$ . □

**Följd 3.3.** *Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Om  $i > n$  så gäller att  $d_i^p = 0$ .*

*Observation 2.* Vi ser att för polynom  $p$  av grad  $n$  kan vi m.h.a sats 3.2 bestämma högstgradskoefficienten  $a_n$  genom  $a_n = \frac{d_n^p}{n!}$ .

**Definition 3.3.** Antag att vi har talföljd med konstant steglängd. Med **konstant differens**  $d_n \neq 0$  menas då att alla  $k$  kända tal på differensnivå  $n$  är lika och nollskilda. Observera att  $k$  kan vara 1.

*Exempel 11.* Bestäm högstgradstermen i något polynom  $p$  som interpolerar funktionsvärden i följande tabell.

x=	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)=	1	1	15	55	133	261	451	715

Vi har 8 punkter och vill helst inte använda Lagrange eller Newtons interpolationsformler då vi i så fall måste ansätta polynom av grad 7. Tanken på att invertera en  $8 \times 8$  matris för att använda direkt interpolation är heller inte så lockande. Vi gör istället en differenstabell.

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x) =$	1	1	15	55	133	261	451	715
$d_1 =$	0	14	40	78	128	190	264	
$d_2 =$		14	26	38	50	62	74	
$d_3 =$			12	12	12	12	12	

Vi ser att vi får konstant differens  $d_n = d_3 = 12$ . Sats 3.2 ger då att vi kan interpolera med ett tredjegradspolynom vars högsta term har koefficient  $a_n = \frac{d_n}{n!} = \frac{12}{3!} = 2$ . Högstgradstermen i  $p(x)$  är  $2x^3$ .

Antag att vi vill bestämma hela  $p(x)$  i exempel 11. Man kan då bilda ny talföljd  $f(x) - 2x^3$  som blir av grad 2 och använda sats 3.2 igen för att bestämma  $a_2$ . På detta sätt kan man fortsätta tills man bestämt hela  $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ . Redan sats 3.2 ger alltså en algoritm som vi trots att den är primitiv sammanfattar i punktform.

**Beskrivning 5.** En enkel men lite arbetskrävande interpolationsalgoritm.

Antag att vi har talföljd  $f(1), f(2), \dots, f(m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$  och söker polynom  $p(x)$  som interpolerar denna.

- 1) Gör differenstabell och bestäm konstant differens  $d_n \neq 0$ .
- 2) Polynomets grad ges av  $n$  och högstgradsterm  $a_n = \frac{d_n}{n!}$ .
- 3) Skapa ny talföljd given av  $f_1(x) = f(x) - a_n x^n$ .
- 4) Använd steg 1, 2 och 3 på  $f_1$  och bestäm  $a_{n-1}$ .
- 5) Bilda  $f_2(x) = f(x) - (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1})$  för att bestämma  $a_{n-2}$ .
- 6) Upprepa förfarandet tills  $a_0$  och därmed  $p$  är bestämd.

Vi såg i exempel 11 att där kunde vi interpolera med ett tredjegradspolynom  $p(x)$ . Detta  $p(x)$  är entydigt bestämt upp till grad 3 men det finns naturligtvis polynom av högre grad som går genom dessa punkter. Man kan fråga sig om det t.ex finns sådana polynom av grad 5 eller 6? Svaret är nej vilket uttrycks i sats 3.6 men innan vi ser på den formulerar vi två hjälpsatser.

**Lemma 3.4.** *Antag att vi har talföljd med konstant steglängd och att differensrad  $d_i$  inte är konstant, då kan man inte interpolera talföljden med polynom av grad  $i$ .*

*Bevis.* Antag att differensrad  $d_i$  inte är konstant, d.v.s det finns  $d_i(x) \neq d_i(y)$ . Med hjälp av sats 3.2 kan vi beräkna högstgradskoefficient men  $\frac{d_i(x)}{i!} \neq \frac{d_i(y)}{i!}$  vilket ger att vi inte får entydigt polynom som interpolerar hela talföljden.  $\square$

*Exempel 12.* Betrakta följande differenstabell, går det att interpolera talföljd  $f$  med andragspolynom?

$x =$	1	2	3	4
$f(x) =$	1	4	9	17
$d_1 =$	3	5	8	
$d_2 =$	2	3		

Vi har inte konstant differens  $d_2$  och kan då inte interpolera hela talföljden  $f$  med andragradspolynom. Mot 3 punkter svarar entydigt polynom i  $\mathcal{P}_2$  och vi vet att  $p(x) = x^2$  ger de tre första talen 1, 4, 9. Men  $p(4) = 16 \neq 17$  så  $p$  kommer inte att interpolera hela talföljden. Man kan säga att vi utgick från  $d_2(1) = 2$  när vi bestämde  $p$ . Om vi hade utgått från  $d_2(2) = 3$  hade vi kunnat interpolera 4, 9, 17 med andragradspolynom  $q(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$  men  $q(1) = 2 \neq 1$ .

**Lemma 3.5.** *Antag att vi har talföljd med konstant steglängd och att differensrad  $d_j$  är konstant 0, då kan man inte interpolera talföljden med polynom av grad  $j$ .*

*Bevis.* Antag att vi vill interpolera med polynom av grad  $j$ . Vi beräknar högsta-gradskoefficient enligt sats 3.2,  $a_j = \frac{d_j}{j!}$ . Om nu  $d_j$  är konstant 0 får vi  $a_j = 0$ .  $\square$

**Sats 3.6.** *Antag att vi har talföljd med konstant steglängd bestående av  $m$  tal och att vi har konstant differens  $d_n \neq 0$ . Då gäller att det entydiga polynom i  $\mathcal{P}_{m-1}$  som interpolerar är precis av grad  $n$ .*

*Bevis.* Antag att vi har talföljd med konstant steglängd bestående av  $m$  tal och att vi har konstant differens  $d_n \neq 0$ . Då är alla  $d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_0$  ickekonstanta och det följer av Lemma 3.4 att man inte kan interpolera med polynom av dessa grader. Vidare har vi att  $d_{n+1}, d_{n+2}, \dots, d_{m-1}$  alla är konstant 0. Av Lemma 3.5 följer då att man heller inte kan interpolera med polynom av dessa grader. Eftersom vi vet att man kan interpolera  $m$  punkter med polynom  $p \in \mathcal{P}_{m-1}$  måste då  $p$  vara av precis grad  $n$ .  $\square$

*Observation 3.* Om vi har konstant differens  $d_n \neq 0$  i  $k$  tal kan vi inte interpolera med polynom av grad  $n+1, n+2, \dots, n+k-1$ . I exempel 11 kunde vi interpolera med polynom av grad 3. Nästa möjliga grad är 8.

**3.2. Några speciella följder.** Vi studerar polynoma talföljder och då kan det vara på sin plats att som kontrast se på några talföljder som inte riktigt passar in i mönstret.

*Exempel 13.* Antag att vi har talföljd enligt differensstabell och att  $f$  inte är nollpolynom.

$x =$	1	2	3
$f(x) =$	0	0	0
$d_1(x) =$	0	0	
$d_2(x) =$	0		

Vi har inte konstant differens  $d_n \neq 0$  men vet att vi kan interpolera med  $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ . Problemet är att vi har  $n$  punkter till polynom av

grad  $n$  och  $p$  är då inte entydigt bestämt.  $p(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)$  fungerar lika bra.

Låt oss se på några differenstabeller där talföljden inte ges av ett polynom.

*Exempel 14.* Betrakta början av differenstabellen till följd  $(2^n)_{n=1}^\infty$ . Som vi ser går talföljden igen på varje rad och vi får för den oändliga följd aldrig konstant differens.

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	...
$y(x) =$	2	4	8	16	32	64	128	...
	2	4	8	16	32	64		
		2	4	8	16	32		
			2	4	8	16		
				2	4	8		

För att läsaren inte ska leva i villfarelsen att exponentiella uttryck ger triviala differenstabeller ser vi också på  $g(x) = 3^x - 2^x$ .

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	...
$g(x) =$	1	5	19	65	211	665	2059	...
	4	14	46	146	454	1394		
		10	32	100	308	940		
			22	68	208	632		
				46	140	424		

Här får vi något lite mer svåröverskådligt. Metoder för att lista ut vad för ett uttryck som ger denna talföljd ligger utanför uppsatsens ram men den som är intresserad kan studera vänster diagonal i exemplen ovan. Observera att man alltid kan interpolera en ändlig delföljd men det finns inte polynom som interpolerar dessa följder i sin helhet.

*Exempel 15.* Fibonaccis talföljd  $F$  ges rekursivt av

$$F = \begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Låt oss betrakta början av talföljden  $F$  i differenstabell.

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$F =$	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	...
	1	1	2	3	5	8	13	21	34		
		0	1	1	2	3	5	8	13		
			1	0	1	1	2	3	5		
				-1	1	0	1	1	2		

Talföljden kommer igen på varje rad och finns också i diagonaler. Här kan man säkert hitta många egenskaper hos Fibonaccitalen men vi nöjer oss med att konstatera att vi aldrig får konstant differens om vi tar med tillräckligt många tal i  $F$ .

**3.3. Mer från differenstabeller.** Visserligen är differenstabeller bara ett visuellt stöd men de låter oss ana många egenskaper hos polynom och deras differenser. Vi ska nu undersöka några av dessa egenskaper och även om en del iakttagelser är triviala kan de vara användbara. Först ska vi se hur man utifrån en polynom talföljd given av  $p$  kan beräkna valfri position i differenstabellen. Vi vet t.ex att  $d_1(3) = p(4) - p(3)$  men hur beräknar man  $d_7(11)$ ?

**Sats 3.7.** *Låt  $p$  vara polynom. Då gäller*

$$d_i^p(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} p(x+i-k) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

*Bevis.* Vi gör ett induktionsbevis. Låt  $p$  vara polynom.

Satsen ger  $d_0^p(x) = p(x)$  vilket stämmer med definitionen av differenspolynom.

Antag att satsen är sann för  $i$ , vi ska då visa att den gäller för  $i+1$ . Enligt definition har vi  $d_{i+1}(x) = d_i(x+1) - d_i(x)$  vilket enligt induktionsantagandet blir

$$\begin{aligned} d_{i+1}(x) &= \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} p((x+1)+i-k) - \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} p(x+i-k) = \\ &= \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} p(x+(i+1)-k) - \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{k-1} \binom{i}{k-1} p(x+i-(k-1)) = \\ &= \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{i}{k} p(x+(i+1)-k) - \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^{k-1} \binom{i}{k-1} p(x+(i+1)-k) = \\ &= \binom{i}{0} p(x+i+1) + \sum_{k=1}^i (-1)^k \left( \binom{i}{k} + \binom{i}{k-1} \right) p(x+(i+1)-k) + (-1)^{i+1} \binom{i}{i} p(x) \\ &= \binom{i+1}{0} p(x+i+1) + \sum_{k=1}^i (-1)^k \binom{i+1}{k} p(x+(i+1)-k) + (-1)^{i+1} \binom{i+1}{i+1} p(x) = \\ &= \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k \binom{i+1}{k} p(x+(i+1)-k) \end{aligned}$$

Vi har visat att om satsen gäller för  $i$  så gäller den för  $i+1$ . Av induktionsaxiomet följer då att satsen är sann för alla ickenegativa heltal  $i$ .  $\square$

*Exempel 16.* Vi har här en differenstabell för  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$ . Bestäm  $d_3(2)$ .

$x =$	1	2	3	4	5	6	7
$f(x) =$	2	3	30	131	378	867	1710
$d_1 =$		.	.	.	.	.	.
$d_2 =$			.	.	.	.	.
$d_3 =$				$d_3(2)$	.	.	.

Sats 3.7 ger

$$\begin{aligned} d_3(2) &= \binom{3}{0}f(2+3) - \binom{3}{1}f(2+2) + \binom{3}{2}f(2+1) - \binom{3}{3}f(2) = \\ &= 378 - 3 \cdot 131 + 3 \cdot 30 - 3 = 72. \end{aligned}$$

*Observation 4.* För positivt heltal  $n$  gäller

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+n-k)^n = n!$$

Varför? Sätt i sats 3.7  $p(x) = x^n$  och  $i = n$ . Då får vi  $d_n = n!a_n = n!$ . Notera också att vi får  $n$ -fakultet oberoende av  $x$ .

*Exempel 17.* Låt  $f(x) = x^2$ . Då säger Obs 4

$$\begin{aligned} \binom{2}{0}x^2 - \binom{2}{1}(x-1)^2 + \binom{2}{2}(x-2)^2 &= \\ = 3^2 - 2 \cdot 2^2 + 1 &= 117^2 - 2 \cdot 116^2 + 115^2 = \pi^2 - 2(\pi-1)^2 + (\pi-2)^2 = 2! \end{aligned}$$

*Observation 5.* Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$  och låt  $m$  vara heltal med  $m \geq 1$ . Då gäller

$$\sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m}{k} p(x+n+m-k) = 0.$$

Varför detta är sant ser man om man kombinerar följd 3.3 och sats 3.7, d.v.s om vi tar till alternerande binomialkoefficienter av högre ordning än polynomets grad hamnar vi i differenspolynom under  $d_n$  och de är alla 0. Notera att detta är oberoende av  $x$ .

Vi har en sak från kapitel 2 som vi inte tagit itu med än och det är att mer handgripligt visa att matrisen  $A$  vid direkt interpolation är inverterbar. Med hjälp av efterföljande observationer till sats 3.7 kan vi visa det specialfall som intresserar oss.

*Observation 6.* Låt  $x_0, x_1, \dots, x_n$  i  $A$  vara växande följd med steglängd 1. Vi ska då visa att  $A$  är inverterbar genom att visa att  $A$  kan reduceras till identitetsmatrisen. Vi låter  $r_i$  beteckna rad  $i$ .

$$A = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0^0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1^0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n^0 \end{bmatrix}$$

1) Gör radoperationer till  $r_n$  enligt följande. Addera  $\sum_{j=1}^n (-1)^j \binom{n}{j} r_{n-j}$  till  $r_n$ . Då ger observation 4 att man i position  $(n, 1)$  får  $n!$ . De övriga positionerna på

den raden kommer enligt observation 5 att bli 0 och matrisen har då följande utseende.

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0^0 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1^0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n! & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

2) Reducera  $n!$  till 1 och reducera sedan alla andra positioner i första kolumnen till 0.

3) Addera nu  $\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} r_{n-1-j}$  till  $r_{n-1}$ . Då får vi p.s.s att position  $(n-1, 2)$  är  $(n-1)!$  och de övriga på  $r_{n-1}$  är alla 0.

Fortsätt på detta sätt och vi kommer att få en matris som är 0 i alla positioner utom diagonalelementen som är 1. Alltså är  $A$  inverterbar.

*Anmärkning 8.* Notera att det bara krävs att följderna  $x_0, \dots, x_n$  har en konstant steglängd  $s$ . T.ex i position  $(n, 1)$  får vi  $s^n n!$  istället för  $n!$  men  $A$  är likafullt inverterbar.

Vi går vidare och ser på ytterligare konsekvenser av sats 3.7. Observation 5 säger att vi har ekvation som gäller för alla polynom av grad  $n$  oberoende av  $x$  och det ger oss en viktig egenskap hos polynom.

*Observation 7.* Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Då kan  $p$ 's funktionsvärden uttryckas rekursivt med

$$p(x+n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k} p(x+n+1-k).$$

Varför? Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Sätt  $m=1$  i Observation 5. Då får vi

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} p(x+n+1-k) = 0 \iff$$

$$p(x+n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k} p(x+n+1-k).$$

Om vi har talföljd given av polynom av grad  $n$ , då kan vi extrapolera med hjälp av rekursionsformeln utan att först bestämma polynomets koefficienter.

*Exempel 18.* Antag att vi ser en sten falla från ett högt torn. Vi råkar notera dess avverkade sträcka vid olika tidpunkter i en tabell.

tid i sekunder	$t=$	1	2	3	4
sträcka i meter	$f(t)=$	7	24	51	?

Nu vill vi gärna beräkna hur långt stenen fallit efter 4 sekunder. Tyvärr är våra

fysikkunskaper lite rostiga, det enda vi minns är att detta beskrivs med en andragradsekvation. Andragradsekvation!!!, då har vi obs 7 och använder binomialkoefficienter av ordning 3.

$$f(4) = \binom{3}{1}51 - \binom{3}{2}24 + \binom{3}{3}7 = 3 \cdot 51 - 3 \cdot 24 + 7 = 88$$

Stenen har fallit 88m efter 4s.

Samma rekursiva metod skulle kunna användas för att extrapolera åt andra hållet men differenspolynomen ger oss ett alternativ.

**Proposition 3.8.** *Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Då gäller*

$$p(x-1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^p(x).$$

*Bevis.* Vi beräknar  $p(x-1)$  genom definitionen av differenspolynom.

$$\begin{aligned} p(x-1) &= p(x) - d_1(x-1) = p(x) - (d_1(x) - d_2(x-1)) = \\ &= p(x) - d_1(x) + (d_2(x) - d_3(x-1)) = p(x) - d_1(x) + d_2(x) - (d_3(x) - d_4(x-1)) = \\ &= p(x) - d_1(x) + d_2(x) - d_3(x) + \cdots + (-1)^{n-1} (d_{n-1}(x) - d_n(x-1)) = \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^p(x) \end{aligned}$$

eftersom  $d_n(x-1) = d_n(x)$ . □

Med hjälp av proposition 3.8 kan vi lätt bestämma en av polynomets koefficienter ur differens Tabellen.

**Följd 3.9.** *Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$  och  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Då gäller*

$$a_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^p(1).$$

Varför? Sätt  $x = 1$  i proposition 3.8 och vi får  $p(0) = a_0$ .

*Exempel 19.* Låt  $p(x)$  vara det polynom av lägst möjliga grad som interpolerar talföljd  $f$  i tabellen. Bestäm koefficienten  $a_0$  i  $p(x)$ .

$x =$	1	2	3	4	5
$f(x) =$	<b>3</b>	7	47	177	475
$d_1 =$	<b>4</b>	40	130	298	
$d_2 =$		<b>36</b>	90	168	
$d_3 =$			<b>54</b>	78	
$d_4 =$				<b>24</b>	

Vi har konstant differens i  $d_4$  vilket ger att  $p$  är ett fjärdegradspolynom. Följd 3.9 ger då

$$a_0 = 3 - 4 + 36 - 54 + 24 = 5.$$

Observera att vi kan anta att  $d_5 \neq 0$  och interpolera talföljden med ett femtegradspolynom. Då får vi en konstant term  $b_0 = 5 - d_5$ .

**Proposition 3.10.** *Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Då gäller*

$$p(x+1) = \sum_{i=0}^n d_i^p(x-i).$$

*Bevis.* Vi argumenterar rekursivt utifrån definitionen av differenspolynom.

$$\begin{aligned} p(x+1) &= p(x) + d_1(x) \\ &= p(x) + d_1(x-1) + d_2(x-1) \\ &= p(x) + d_1(x-1) + d_2(x-2) + d_3(x-2) \\ &= p(x) + d_1(x-1) + d_2(x-2) + d_3(x-3) + d_4(x-3). \end{aligned}$$

Eftersom det allmänt gäller att  $d_i(x-k+1) = d_i(x-k) + d_{i+1}(x-k)$  och speciellt att  $d_n(x-n) = d_n(x-n+1)$  så är vi klara.  $\square$

*Exempel 20.* Låt  $f(x) = x^3 - 4x + 5$  vilket ger följande differensstabell.

$x = 1$	$2$	$5$	$20$	$53$	<b>110</b>	<b>197</b>	$320$
	$3$	$15$	$33$	<b>57</b>	$87$	$123$	
		$12$	$18$	<b>24</b>	$30$	$36$	
		$6$	<b>6</b>	$6$	$6$		

Proposition 3.10 säger då t.ex att  $110 + 57 + 24 + 6 = 197$ .

**Följd 3.11.** *Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$  och  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Då gäller*

$$p(x+k) = p(x) + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n d_i^p(x+j-i)$$

och vi har också

$$p(x+k) = p(x) + \sum_{m=0}^{k-1} d_1^p(x+m).$$

*Bevis.* Proposition 3.10 applicerad på  $d_1^p$  ger direkt att

$$\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n d_i^p(x+j-i) = \sum_{m=0}^{k-1} d_1^p(x+m)$$

så vi behöver bara visa det andra påståendet i följd 3.11 vilket vi gör med induktion över  $k$ .

$$p(x) + \sum_{m=0}^0 d_1^p(x+m) = p(x) + d_1^p(x) = p(x+1)$$

så basfallet stämmer. Antag nu att påståendet gäller för något positivt heltal  $k$ . Vi ska då visa att det gäller för  $k + 1$ .

$$\begin{aligned} p(x + k + 1) &= p(x + k) + d_1^p(x + k) \stackrel{\text{enl. ant}}{=} p(x) + \sum_{m=0}^{k-1} d_1^p(x + m) + d_1^p(x + k) = \\ &= p(x) + \sum_{m=0}^k d_1^p(x + m) \end{aligned}$$

Vi har visat att det då gäller för  $k + 1$ . Av induktionsaxiomet följer då att påståendet är sant för alla positiva heltal  $k$ .  $\square$

Vi återanvänder exempel 20 för att åskådliggöra följd 3.11.

*Exempel 21.* Det första påståendet: Låt  $x = 4, k = 3$ , då säger följd 3.11 att  $p(7) = 320$  är summan av de andra fetmarkerade talen.

$x =$	1	2	3	4	5	6	7
$f(x) =$	2	5	20	<b>53</b>	110	197	<b>320</b>
	3	15	<b>33</b>	<b>57</b>	<b>87</b>	123	
		12	<b>18</b>	<b>24</b>	<b>30</b>	36	
		<b>6</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	6	

Det andra påståendet: Låt  $x = 2, k = 5$ . Då får vi  $p(7) = 320$  är summan av de andra fetmarkerade talen.

$x =$	1	2	3	4	5	6	7
$f(x) =$	2	<b>5</b>	20	53	110	197	<b>320</b>
	3	<b>15</b>	<b>33</b>	<b>57</b>	<b>87</b>	<b>123</b>	
		12	18	24	30	36	
		6	6	6	6	6	

Ibland betraktar vi differenstabeller med element ur  $\mathbb{R}[x]$ . Speciellt kommer det till användning i kapitel 4 men tanken är bra att ha med sig varför vi introducerar den nu. Vi kan ange en talföljd med  $f(x), f(x + 1), \dots, f(x + m)$ . Antag nu att vi inte evaluerar utan bestämmer varje sådant polynom liksom differenspolynom i varje position i en differenstabell.

*Exempel 22.* Låt oss se på tabell genererad av  $f(x) = x^2$ .

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & & (x + 1)^2 & & (x + 2)^2 \\ 2x + 1 & & & & 2(x + 1) + 1 \\ & & 2 & & \end{array}$$

Vi kan räkna med dessa element, t.ex ger sats 3.7 att  $(x + 2)^2 - 2(x + 1)^2 + x^2 = 2$  och om vi evaluerar *hela* denna tabell då  $x = 1$  får vi de vanliga talföljderna

$$\begin{array}{ccc}
 1 & 4 & 9 \\
 & 3 & 5 \\
 & & 2
 \end{array}$$

**3.4. Vi fixerar en differensdiagonal.** Vi kunde m.h.a sats 3.2 lätt bestämma koefficienten  $a_n$  tack vare att  $d_n$  är konstant och inte beror av  $x$ . För att komma vidare fixerar vi  $x = 1$  vilket ger oss en fast differensdiagonal  $d_j(1)$ .

$$\begin{array}{cccc}
 x = & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \hline
 f(x) = & d_0(1) & f(2) & f(3) & f(4) \\
 \hline
 & d_1(1) & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & d_2(1) & \cdot & \cdot \\
 & & & d_3(1) & \cdot
 \end{array}$$

Utifrån denna differensdiagonal vill vi beräkna godtycklig  $d_i(k)$  då  $k \geq 1$ . Vi vet t.ex att  $d_i(1) + d_{i+1}(1) = d_i(2)$ . Följande sats generaliserar detta.

**Sats 3.12.** *Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$  och  $i, k$  heltal med  $0 \leq i, 1 \leq k$ . Då gäller*

$$d_i^p(k) = \sum_{j=i}^{k+i-1} d_j^p(1) \binom{k-1}{j-i}.$$

*Bevis.* Här har vi två argument. I en differenstabell anger  $i$  rad och  $k$  diagonal. Vi håller först  $k$  fixt och visar för  $i$ . Låt  $0 \leq i$  och  $k = 1$ . Då

$$\sum_{j=i}^i d_j(1) \binom{0}{j-i} = d_i(1)$$

så påståendet stämmer för alla  $i$  med fixt  $k = 1$ . Vi gör nu induktionsbevis över  $k$ . Basfallet då  $k = 1$  har vi visat. Antag nu att påståendet stämmer för något  $d_i^p(k)$  där  $0 \leq i, 1 \leq k$ . Vi ska visa att det då stämmer för  $d_i^p(k+1)$ .

$$\begin{aligned}
 d_i^p(k+1) &= d_i^p(k) + d_{i+1}^p(k) \stackrel{\text{enl.ant.}}{=} \sum_{j=i}^{k+i-1} d_j^p(1) \binom{k-1}{j-i} + \sum_{j=i+1}^{k+i} d_j^p(1) \binom{k-1}{j-i-1} = \\
 &= d_i^p(1) + \sum_{j=i+1}^{k+i-1} d_j^p(1) \binom{k-1}{j-i} + \sum_{j=i+1}^{k+i-1} d_j^p(1) \binom{k-1}{j-i-1} + d_{k+i}^p(1) = \\
 &= d_i^p(1) + \sum_{j=i+1}^{k+i-1} d_j^p(1) \left( \binom{k-1}{j-i} + \binom{k-1}{j-i-1} \right) + d_{k+i}^p(1) = \\
 &= d_i^p(1) + \sum_{j=i+1}^{k+i-1} d_j^p(1) \binom{k}{j-i} + d_{k+i}^p(1) = \sum_{j=i}^{k+i} d_j^p(1) \binom{k}{j-i}
 \end{aligned}$$

Vi har visat att påståendet i så fall stämmer för  $p(k+1)$ . Av induktionsaxiomet följer då att satsen gäller för alla heltal  $i, k$  där  $0 \leq i, 1 \leq k$ .  $\square$

*Exempel 23.* Beräkna  $d_1(4)$  m.h.a sats 3.12.

$x =$	1	2	3	4	5	6	7
$f(x) =$	0	2	30	132	380	870	1722
$d_1 =$	<b>2</b>	28	102	<b>248</b>	490	852	
$d_2 =$		<b>26</b>	74	146	242	362	
$d_3 =$			<b>48</b>	72	96	120	
$d_4 =$			<b>24</b>	24	24		

Sats 3.12 ger att

$$d_1(4) = \sum_{j=1}^4 d_j(1) \binom{3}{j-1} = 2 + 3 \cdot 26 + 3 \cdot 48 + 24 = 248.$$

Observera att vi m.h.a sats 3.12 kan beräkna för känt polynom  $f$  alla  $f(k)$  för heltal  $k \geq 1$ . För ett interpolerande polynom  $p$  får vi säga att vi extrapolerar. Vi tar ett trivialt exempel för att klargöra detta.

*Exempel 24.* Låt  $f(x) = x^2$ . Beräkna  $f(6)$ .

Vi gör en differensstabell. Observera att vi går djupare än vi behöver bara för att göra detta tydligt.

$x =$	1	2	3	4	5	6
$f(x) =$	1	4	9	·	·	?
$d_1 =$	3	5	·	·	·	
$d_2 =$		2	·	·	·	
$d_3 =$			0	·	·	
$d_4 =$				0	·	
$d_5 =$					0	

Sats 3.12 ger då

$$\begin{aligned} f(6) &= \sum_{j=0}^5 d_j(1) \binom{5}{j} = 1 \binom{5}{0} + 3 \binom{5}{1} + 2 \binom{5}{2} + 0 \binom{5}{3} + 0 \binom{5}{4} + 0 \binom{5}{5} = \\ &= 1 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 10 = 36. \end{aligned}$$

Vi kunde alltså direkt ha skrivit  $f(6) = \sum_{j=0}^2 d_j(1) \binom{5}{j}$ .

Detta ger oss ett sätt att direkt skriva ett uttryck för ett interpolerande polynom. I kapitel 2 såg vi på Newtons interpolationsformel. Den passar utmärkt att anpassa till vår miljö av differenspolynom.

**Definition 3.4.** Newtonpolynom  $\eta_i$  ges av

$$\eta_i(x) = \prod_{\ell=1}^i \frac{x - \ell}{\ell}.$$

Observera att  $\eta_0 = 1$ .

**Sats 3.13.** Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Då kan vi skriva  $p$  som en linjärkombination av Newtonpolynom.

$$p = \sum_{i=0}^n d_i(1)\eta_i.$$

*Bevis.* Antag att  $q(x) = \sum_{i=0}^n d_i(1)\eta_i$ . Då räcker det att visa att  $q(1) = p(1)$ ,  $q(2) = p(2)$ ,  $\dots$ ,  $q(n+1) = p(n+1)$ . Detta visar vi med induktion över argumentet.

$$q(1) = \sum_{i=0}^n d_i(1)\eta_i = d_0(1)\eta_0 + 0 = p(1)$$

så basfallet stämmer. Antag att påståendet stämmer för  $k$ . Då har vi

$$\begin{aligned} p(k) &= p(1) + d_1(k-1) + d_2(1)\frac{(k-1)(k-2)}{2} + \dots + d_{k-1}(1)\frac{(k-1)!}{(k-1)!} + 0 = \\ &= p(1) + \binom{k-1}{1}d_1(1) + \binom{k-1}{2}d_2(1) + \dots + \binom{k-1}{k-1}d_{k-1}(1) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} d_i(1)\binom{k-1}{i}. \end{aligned}$$

Vi ska visa att påståendet i så fall gäller för  $k+1$ . Observera att sats 3.12 ger att  $d_1(k) = \sum_{i=1}^k d_i(1)\binom{k-1}{i-1}$ .

$$\begin{aligned} p(k+1) &= p(k) + d_1(k) \stackrel{\text{enl. ant.}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} d_i(1)\binom{k-1}{i} + \sum_{i=1}^k d_i(1)\binom{k-1}{i-1} = \\ &= d_0(1)\binom{k-1}{0} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i(1)\binom{k-1}{i} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i(1)\binom{k-1}{i-1} + d_k(1)\binom{k-1}{k-1} = \\ &= d_0(1)\binom{k-1}{0} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i(1)\left(\binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1}\right) + d_k(1)\binom{k-1}{k-1} = \\ &= \sum_{i=0}^k d_i(1)\binom{k}{i}. \end{aligned}$$

Speciellt har vi att

$$p(n+1) = \sum_{i=0}^n d_i(1)\binom{n}{i}.$$

Av induktionsaxiomet följer då att  $q = p$  i de  $n+1$  punkterna och  $p$  är bestämt.  $\square$

**Följd 3.14.** Newtonpolynomen  $\eta_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  är en bas för  $\mathcal{P}_n$ .

*Exempel 25.* Bestäm polynom  $p$  som interpolerar talföljd  $f$  i differenstabellen.

$x =$	1	3	4	5
$f(x) =$	7	19	37	61
$d_1 =$	12	18	24	
$d_2 =$	6	6		

Vi ser att vi kan interpolera med andragradspolynom. Sats 3.13 ger då

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1) + d_1(1)(x-1) + d_2(1) \frac{(x-1)(x-2)}{2} = \\ &= 7 + 12(x-1) + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{2} = 3x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

I exempel 25 börjar talföljden då  $x = 1$  och vi har också att steglängden är 1. Man kan säga att sats 3.13 liksom flera andra resultat här är anpassade till detta specialfall. Vi ska nu visa att dessa resultat i grunden är allmänna.

*Anmärkning 9.* När vi har en talföljd som börjar då  $x \neq 1$ , d.v.s  $b \neq 1$  och/eller steglängd  $s \neq 1$  bestämmer vi först ett polynom  $q$  som om  $b = 1, s = 1$ , d.v.s utan att ta hänsyn till dessa avvikelser. Sedan transformerar vi  $q$  till ett polynom  $p$  så att  $q(1) = p(b), q(2) = p(b+s), q(3) = p(b+2s)$  osv. Detta gör vi m.h.a funktionen  $\varphi$  som uppfyller

$$\begin{cases} \varphi(1) = b \\ \varphi(2) = b + s \\ \varphi(3) = b + 2s \\ \vdots \end{cases}$$

och vi ser att  $\varphi(k) = b + (k-1)s$ . Med hjälp av  $\varphi$  kan vi då transformera från  $p$  till  $q$  genom

$$q = p \circ \varphi.$$

Eftersom  $\varphi$  är inverterbar kan vi också transformera från  $q$  till  $p$

$$p = q \circ \varphi^{-1}$$

där  $\varphi^{-1}(k) = \frac{k-b+s}{s}$ .

*Exempel 26.* Bestäm polynom  $p(x)$  som interpolerar talföljd  $f$  i differenstabell m.h.a sats 3.13.

$x =$	3	5	7
$f(x) =$	10	36	78
$d_1 =$	26	42	
$d_2 =$	16		

Vi ser att  $b = 3$  och  $s = 2$  men använder först sats 3.13 precis som vanligt för att bestämma polynom  $q(x)$ . Vi skriver t.o.m  $d_i^q(1)$  istället för  $d_i^p(3)$  för att

markera detta.

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i=0}^2 d_i^q(1)\eta_i = 10 + 26(x-1) + 16\frac{(x-1)(x-2)}{2} = \\ &= 10 + 26x - 26 + 8x^2 - 24x + 16 = 8x^2 + 2x. \end{aligned}$$

Sedan transformerar vi  $q$  till  $p$  m.h.a  $\varphi^{-1}$ .

$$\begin{aligned} p &= q \circ \varphi^{-1} = q\left(\frac{x-b+s}{s}\right) = q\left(\frac{x-1}{2}\right) = 8\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-1}{2}\right) = \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + x - 1 = 2x^2 - 3x + 1 \end{aligned}$$

och vi har vårt  $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ .

**3.5. Diagonalen som linjärkombination.** Vi återupptar nu våra studier av den fixerade differensdiagonalen och ett mål är att kunna lösa ut andra koefficienter än  $a_n$ . Vi vet att gradtalet faller för varje differensnivå. Endast  $a_n$  har överlevt till  $d_n$  och  $d_{n-1}$  innehåller bara  $a_n$  och  $a_{n-1}$ . Om vi nu kan skriva  $d_{n-1}(1)$  som en linjärkombination av  $a_n$  och  $a_{n-1}$  med naturliga tal, d.v.s enkelt uttryckt säga hur många  $a_n$  respektive  $a_{n-1}$  det finns i  $d_{n-1}$  så kan vi också bestämma  $a_{n-1}$ . Vi formulerar en allmän sats för detta.

**Sats 3.15.** *Låt  $p$  vara polynom,  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Då kan vi skriva differens  $d_i^p(1)$  som en linjärkombination av  $p$ :s koefficienter enligt*

$$d_i^p(1) = \sum_{k=i}^n A_k^i a_k$$

där  $A_k^i$  ges av

$$A_k^i = \sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{i}{m} (i+1-m)^k.$$

*Bevis.* Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$  med  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Vi delar upp  $p$  i  $n+1$  delar så att

$$p(x) = p_n(x) + p_{n-1}(x) + \cdots + p_0(x)$$

där

$$p_k(x) = a_k x^k \quad 0 \leq k \leq n$$

Betrakta nu  $d_i^{p_k}(1)$ . Sats 3.7 ger

$$d_i^{p_k}(1) = \sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{i}{m} (i+1-m)^k a_k.$$

Observation 5 ger att detta blir 0 om  $i > k$ . Alltså får vi bara värden då  $i \leq k \leq n$  och vi kan skriva

$$d_i^p(1) = d_i^{p_n}(1) + d_i^{p_{n-1}}(1) + \cdots + d_i^{p_i}(1)$$

Sätt nu

$$\sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{i}{m} (i+1-m)^k = A_k^i$$

och vi får

$$d_i^p(1) = \sum_{k=i}^n A_k^i a_k.$$

□

Med hjälp av sats 3.15 kan vi alltså skriva ett  $d_i^p(1)$  som en linjärkombination av  $p$ 's koefficienter vilket då kan användas till att bestämma dessa. Det är detta vi tänker på då vi enkelt uttryckt t.ex säger att det finns 60  $a_4$  i  $d_3(1)$ .

*Anmärkning 10.* Observera att en linjärkombination inte måste vara entydig. Det enda vi vet är att vi *kan* skriva den på det här sättet.

*Exempel 27.* Bestäm  $a_n$  och  $a_{n-1}$  i polynom  $p$  som interpolerar talföljd  $f$  i differensstabell och har lägsta möjliga grad.

$x =$	1	2	3	4	5
$f(x) =$	2	0	4	20	54
$d_1$	-2	4	16	34	
$d_2$		6	12	18	
$d_3$		6	6		

Vi har konstant differens  $d_n = d_3 = 6$  och kan m.h.a sats 3.2 direkt beräkna  $a_n = a_3$ .

$$a_n = \frac{d_n}{n!} = \frac{6}{3!} = 1$$

För att beräkna  $a_{n-1} = a_2$  använder vi sats 3.15 som talar om att det bara finns  $a_2$  och  $a_3$  i  $d_2(1) = 6$  och dessutom hur många av varje.

$$6 = d_2(1) = A_2^2 a_2 + A_3^2 a_3$$

där  $i = 2$ ,  $k = 2$  respektive  $k = 3$ .

$$A_2^2 = \sum_{m=0}^2 (-1)^m \binom{2}{m} (2+1-m)^2 = \binom{2}{0} 3^2 - \binom{2}{1} 2^2 + \binom{2}{2} 1^2 = 2$$

$$A_3^2 = \sum_{m=0}^2 (-1)^m \binom{2}{m} (3-m)^3 = \binom{2}{0} 3^3 - \binom{2}{1} 2^3 + \binom{2}{2} 1^3 = 12$$

och vi kan skriva

$$d_2(1) = 6 = 2a_2 + 12a_3 = 2a_2 + 12 \iff a_2 = -3$$

Alltså har vi  $a_n = a_3 = 1$  och  $a_{n-1} = a_2 = -3$ .

Detta att man kan räkna ut antalet av en koefficient i något  $d_i(1)$  genom att bara ändra exponenten förtjänar ett exempel till.

*Exempel 28.* Antag att vi har polynom  $p$  av grad 34. Hur många koefficienter  $a_7$  finns det då i  $d_2^p(1)$ ?

Att  $p$  är av grad 34 har ingen betydelse men  $p$  måste naturligtvis vara av minst grad 7. Vi använder sats 3.15 med  $k = 7, i = 2$ .

$$A_7^2 = \sum_{m=0}^2 (-1)^m \binom{2}{m} (3-m)^7 = \binom{2}{0} 3^7 - \binom{2}{1} 2^7 + \binom{2}{2} 1^7 = 1932$$

Det finns 1932  $a_7$  i  $d_2^p(1)$ .

Eftersom vi kan skriva våra  $d_i(1)$  som linjärkombinationer kan vi se på sats 3.15 m.h.a av matriser.

$$\begin{bmatrix} d_1(1) \\ d_2(1) \\ \vdots \\ d_n(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ 0 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Vi betecknar matriserna ovan med  $d = Mc$ . Eftersom  $M$  är triangulär och alla diagonalelementen  $\neq 0$  så är  $M$  inverterbar och vi kan skriva  $d = Mc \iff c = M^{-1}d$  så man kan även här använda linjär algebra för att bestämma ett interpolerande polynoms koefficienter.

*Exempel 29.* Bestäm matrisen  $M$  t.o.m grad  $n = 7$ .

Vi redovisar beräkningarna för två positioner.

$$A_1^2 = \sum_{m=0}^2 (-1)^m \binom{2}{m} (2+1-m)^1 = 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 0$$

$$A_4^3 = \sum_{m=0}^3 (-1)^m \binom{3}{m} (3+1-m)^4 = 4^4 - 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 2^4 - 1 = 60.$$

Vi vet att  $M$  är triangulär så vi behöver egentligen bara beräkna då  $k \geq i$  och får då

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 63 & 127 \\ 0 & 2 & 12 & 50 & 180 & 602 & 1932 \\ 0 & 0 & 6 & 60 & 390 & 2100 & 10206 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 360 & 3360 & 25200 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 2520 & 31920 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720 & 20160 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5040 \end{bmatrix}$$

$M$  säger oss t.ex att  $d_5(1) = 120a_5 + 2520a_6 + 31920a_7$ . Observera att om vi har polynom av högre grad än 7 kommer  $d_5(1)$  innehålla fler termer.

**3.6. Differenspolynom och derivata.** Det vi nu önskar är en mer generell metod att bestämma differenspolynomen  $d_j^p(x)$  och då ska vi undersöka något som legat i vassen längde, nämligen deras förhållande till derivata. Vi konstaterade tidigt att högstegradstermen är lika i de båda fallen men sedan upphör likheten. Antag att vi har ett monom  $f(x) = x^n$ . När vi deriverar får vi  $f'(x) = nx^{n-1}$  som består av en enda term medan  $d_1^f$  kommer att bestå av  $n$  termer. Lyckligtvis kan alla dessa termer beskrivas i form av derivata men för att göra detta behöver vi några verktyg.

**Definition 3.5.** Differentialoperatoren  $\delta_t$  ges av

$$\delta_t = \sum_{k=1}^t \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} \quad 1 \leq t \leq n.$$

*Exempel 30.* Låt  $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ . Bestäm  $\delta_2(f)$  och jämför den med  $d_1^f$ . Först bestämmer vi  $\delta_2(f)$ .

$$\delta_2(f) = f' + \frac{f''}{2!} = 3x^2 + 4x + 3 + \frac{6x + 4}{2} = 3x^2 + 7x + 5$$

och sedan  $d_1^f$

$$\begin{aligned} d_1^f(x) &= f(x+1) - f(x) = (x+1)^3 + 2(x+1)^2 + 3(x+1) + 4 - (x^3 + 2x^2 + 3x + 4) \\ &= 3x^2 + 7x + 6. \end{aligned}$$

Vi ser att termerna av grad 2 och grad 1 överensstämmer medan de konstanta termerna är olika.

Om det nu är så att  $\delta_t$  ger  $t$  termer i differenspolynomet så vill vi kunna separera just dessa varför vi behöver en projektionsoperator.

**Definition 3.6.** Projektionsoperatoren  $K_{n,t}$  definierar vi indirekt.

Låt projektionsoperatoren  $\Pi_{n,t} : \mathcal{P}_n \mapsto \mathcal{P}_{n-t}$  vara

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \mapsto \sum_{k=0}^{n-t} a_k x^k$$

då ges  $K_{n,t}$  av

$$K_{n,t} = I - \Pi_{n,t}$$

där  $I$  är identitetsprojektionen.

Meningen med  $K_{n,t}$  är vi ska kunna använda derivata men att vi bara beaktar de  $t$  termer som har högst grad.

*Exempel 31.* Låt  $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3$ . Då har vi att

$$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 9x^2$$

men

$$K_{4,2}(f'(x)) = 5x^4 + 8x^3$$

Vi har nu verktyg för att kunna undersöka släktskapen mellan derivata och differenspolynom och börjar med att se på fallet med två termer.

**Lemma 3.16.** *Låt  $f$  vara polynom av grad  $n$ . Då gäller att*

$$d_1^f = K_{n-1,2}(\delta_2(f)) + R$$

där  $R$  består av de termer som har lägre grad än  $\text{grad}(f'')$ .

*Bevis.* Vi behöver bara se på de två termer som har högst grad i  $f$  eftersom de övriga hamnar i  $R$ . Låt  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}$ .

$$\begin{aligned} d_1^f(x) &= a_n(x+1)^n + a_{n-1}(x+1)^{n-1} - (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}) = \\ &= a_n \left( \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} x^0 - x^n \right) + \\ &+ a_{n-1} \left( \binom{n-1}{0} x^{n-1} + \binom{n-1}{1} x^{n-2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} x^0 - x^{n-1} \right) = \\ &= a_n \left( \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \right) + a_{n-1} \binom{n-1}{1} x^{n-2} + R = \\ &= n a_n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} a_n x^{n-2} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + R = K_{n-1,2} \left( f' + \frac{f''}{2} \right) + R \end{aligned}$$

□

Vår iakttagelse rörande  $\delta_t$  i exempel 30 var alltså ingen tillfällighet men vi vill gärna kunna bestämma de två högstgradstermerna i godtyckligt differenspolynom  $d_i^f$ .

**Sats 3.17.** *Låt  $f$  vara polynom av grad  $n$ . Då gäller att*

$$d_i^f = K_{n-i,2} \left( f^{(i)} + i \frac{f^{(i+1)}}{2} \right) + R$$

där  $R$  består av de termer som har lägre grad än  $\text{grad}(f^{(i+1)})$ .

*Bevis.* Vi gör ett induktionsbevis.

Av lemma 3.16 vet vi att satsen stämmer då  $i = 1$  eftersom

$$d_1^f = K_{n-1,2} \left( f' + \frac{f''}{2} \right) + R = K_{n-1,2} \left( f' + 1 \cdot \frac{f''}{2} \right) + R$$

Antag att satsen stämmer för  $i$ , d.v.s

$$d_i^f = K_{n-i,2} \left( f^{(i)} + i \frac{f^{(i+1)}}{2} \right) + R$$

Vi ska då visa att den gäller för  $d_{i+1}^f$ .

$$\begin{aligned} d_{i+1}^f &= K_{n-(i+1),2} \left( \delta_2 \left( d_i^f \right) \right) + R = \\ &= K_{n-(i+1),2} \left( \left( D + \frac{1}{2!} D^2 \right) \left( f^{(i)} + i \frac{f^{(i+1)}}{2} \right) \right) + R = \\ &= K_{n-(i+1),2} \left( f^{(i+1)} + i \frac{f^{(i+2)}}{2} + \frac{1}{2} f^{(i+2)} + i \frac{f^{(i+3)}}{4} \right) + R = \\ &= K_{n-(i+1),2} \left( f^{(i+1)} + (i+1) \frac{f^{(i+2)}}{2!} \right) + R \end{aligned}$$

vilket var vad vi ville visa. Av induktionsaxiomet följer då att satsen är sann för alla positiva heltal  $i$ .  $\square$

*Exempel 32.* Låt  $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1$ . Bestäm  $d_3^f(x)$ .

Vi använder sats 3.17 som säger

$$(2) \quad d_3^f(x) = K_{4-3,2} \left( f^{(3)} + 3 \cdot \frac{f^{(4)}}{2} \right) + R$$

Vi deriverar

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 9x^2 - 4x \\ f''(x) &= 12x^2 + 18x - 4 \\ f^{(3)}(x) &= 24x + 18 \\ f^{(4)}(x) &= 24 \end{aligned}$$

insättning i (2) ger

$$d_3^f(x) = K_{1,2} \left( 24x + 18 + 3 \cdot \frac{24}{2} \right) + R = 24x + 54 + R$$

Eftersom  $\text{grad}(f^{(4)}) = 0$  har vi att  $R = 0$  och vi kan skriva

$$d_3^f(x) = 24x + 54$$

Redan med sats 3.15 kunde vi bestämma koefficient  $a_{n-1}$  ur  $d_{n-1}(1)$ . Från sats 3.17 kan vi gå vidare och göra detta möjligt även för andra  $x$ . Först måste vi dock kunna separera  $a_n$  och  $a_{n-1}$  i  $d_{n-1}$ .

**Följd 3.18.** Låt  $p$  var polynom av grad  $n$ . Då gäller att

$$d_{n-1}^p(x) = n!a_n x + (n-1) \frac{n!}{2} a_n + (n-1)!a_{n-1}$$

*Bevis.* Låt polynom  $p = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Observera att vi här bara behöver se på de två termer som har högst grad. Sätt  $i = n-1$  i sats 3.17, då får vi

$$d_{n-1}^p(x) = K_{1,2} \left( f^{(n-1)} + (n-1) \frac{f^{(n)}}{2} \right) = n!a_n x + (n-1)!a_{n-1} + (n-1) \frac{n!}{2} a_n.$$

$\square$

*Observation 8.* Ofta vill vi bestämma  $a_{n-1}$  ur  $d_{n-1}(1)$  varför vi i Följd 3.18 sätter  $x = 1$ , vi får då för polynom  $p$  av grad  $n$

$$d_{n-1}^p(1) = (n-1)!a_{n-1} + \frac{(n+1)!}{2}a_n.$$

Vi kan också betrakta detta som de två lägsta termerna i något  $d_i(1)$ . Tag  $i = n-1$  och vi får

$$d_i^p(1) = i!a_i + \frac{(i+2)!}{2}a_{i+1} + G$$

där  $G$  om inte 0 består av termer  $a_{i+2}, \dots, a_n$ .

*Anmärkning 11.* Obs 8 ger här samma resultat som sats 3.15 men i form av ett kort uttryck som bara beror av differensrad  $i$ .

*Exempel 33.* Bestäm polynom  $p$  som interpolerar följden  $f$  i differens Tabellen.

$x =$	1	2	3
$f(x) =$	1	$e$	$\pi$
$d_1 =$	$e - 1$	$\pi - e$	
$d_2 =$	$\pi - 2e + 1$		

Vi kan interpolera med andragradspolynom. Obs 8 ger

$$d_2(1) = 2!a_2 + 0 \iff a_2 = \frac{\pi - 2e + 1}{2}$$

$$d_1(1) = 1!a_1 + \frac{3!}{2}a_2 + 0 \iff a_1 = e - 1 - \frac{3}{2}(\pi - 2e + 1) = \frac{8e - 3\pi - 5}{2}.$$

Än så länge kan vi bara bestämma de båda högstgradstermerna med den här metoden varför vi bestämmer  $a_0$  m.h.a följd 3.9 som ger

$$a_0 = p(0) = p(1) - d_1(1) + d_2(1) = 1 - (e - 1) + (\pi - 2e + 1) = \pi - 3e + 3.$$

Vi har då att

$$p(x) = \frac{\pi - 2e + 1}{2}x^2 + \frac{8e - 3\pi - 5}{2}x + \pi - 3e + 3$$

När man studerar differenspolynom anar man ibland likheter som innehåller en mix av talföljder, binomialkoefficienter och fakultetsuttryck och dessa kan vara svåra att visa. Vi ska se på ett sådant exempel som vi inte kunde visa mekaniskt. Samtidigt får vi en identitet som kan komma till användning i liknande situationer.

*Exempel 34.* Visa att

$$\binom{i}{0}(i+1)^{i+1} - \binom{i}{1}i^{i+1} + \binom{i}{2}(i-1)^{i+1} - \dots + (-1)^i \binom{i}{i}1^{i+1} = \frac{(i+2)!}{2}$$

Vi använder två tidigare resultat för att visa detta. Först ser vi på obs 8, där står

$$d_i^p(1) = i!a_i + \frac{(i+2)!}{2}a_{i+1} + G$$

Det står att det finns  $\frac{(i+2)!}{2}$  koefficienter  $a_{i+1}$  i  $d_i(1)$ .

Vi ser nu på sats 3.15 som säger att antal  $a_k$  i  $d_i^p(1)$ , d.v.s  $A_k^i$  för  $i \leq k \leq n$  ges av

$$A_k^i = \sum_{m=0}^i \binom{i}{m} (i+1-m)^k$$

Vi sätter in  $k = i + 1$

$$\begin{aligned} A_{i+1}^i &= \sum_{m=0}^i (-1)^m \binom{i}{m} (i+1-m)^{i+1} = \\ &= \binom{i}{0} (i+1)^{i+1} - \binom{i}{1} i^{i+1} + \binom{i}{2} (i-1)^{i+1} - \dots + (-1)^i \binom{i}{i} 1^{i+1} \end{aligned}$$

Vi har beräknat samma sak med vår obs 8 och sats 3.15 varvid vi fått höger repektive vänster led i vår likhet. V.Ä.K.V.

Efter denna utsvävning återgår vi till våra jämförelser av derivata och differenspolynom. Vi har klarat av två termer och nu vill vi på samma sätt kunna bestämma tre termer ur differenspolynom.

**Lemma 3.19.** *Låt  $f$  vara polynom av grad  $n$ . Då gäller att*

$$d_1^f = K_{n-1,3} (\delta_3(f)) + R$$

där  $R$  innehåller de termer som har grad lägre än  $\text{grad}(f^{(3)})$ .

Man visar detta som man visar Lemma 3.16 fast med en term till. Vi utelämnar beviset här.

**Sats 3.20.** *Låt  $f$  vara polynom. Då gäller*

$$d_i^f = K_{n-i,3} \left( f^{(i)} + i \frac{f^{(i+1)}}{2!} + i(3i+1) \frac{f^{(i+2)}}{4!} \right) + R$$

där  $R$  består av de termer som har lägre grad än  $\text{grad}(f^{(i+2)})$ .

Vi visar inte detta här. Bevismetoden är likadan som för sats 3.17 fast med en term till.

*Exempel 35.* Låt  $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 1$ . Bestäm  $d_3^f(x)$ .

Då  $f$  är ett femtegradspolynom kan vi spara en hel del arbete genom att använda sats 3.20 som i detta fall säger

$$(3) \quad d_3^f(x) = K_{2,3} \left( f^{(3)} + 3 \frac{f^{(4)}}{2} + 3(3 \cdot 3 + 1) \frac{f^{(5)}}{4!} \right) + R.$$

Vi deriverar

$$\begin{cases} f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 2x - 5 \\ f''(x) = 20x^3 + 36x^2 - 12x + 2 \\ f^{(3)}(x) = 60x^2 + 72x - 12 \\ f^{(4)}(x) = 120x + 72 \\ f^{(5)}(x) = 120 \end{cases}$$

insättning i (3) ger

$$\begin{aligned} d_3^f(x) &= K_{2,3} \left( 60x^2 + 72x - 12 + 3 \cdot \frac{120x + 72}{2} + 30 \cdot \frac{120}{24} \right) + R = \\ &= 60x^2 + 252x + 246 + R. \end{aligned}$$

Eftersom  $\text{grad}(f^{(5)}) = 0$  har vi att  $R = 0$  och vi kan skriva

$$d_3^f(x) = 60x^2 + 252x + 246.$$

På samma sätt som vi i följd 3.18 separerade två koefficienter i  $d_{n-1}$  ska vi nu göra det för tre termer i  $d_{n-2}$ .

**Följd 3.21.** Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ . Då gäller

$$\begin{aligned} d_{n-2}^p(x) &= \frac{n!}{2!} a_n x^2 + \left( (n-2) \frac{n!}{2!} a_n + (n-1)! a_{n-1} \right) x + \\ &\quad + (n-2)(3n-5) \frac{n!}{4!} a_n + (n-2) \frac{(n-1)!}{2!} a_{n-1} + (n-2)! a_{n-2}. \end{aligned}$$

Man visar följd 3.21 på samma sätt som man visar följd 3.18 fast med tre termer och insättning  $i = n - 2$ .

Vi vill gärna använda följd 3.21 till att bestämma polynomkoefficient  $a_{n-2}$ . Först sätter vi  $x = 1$  och får  $d_{n-2}^f(1)$  beroende av  $n$ .

*Observation 9.* Låt  $f$  vara polynom av grad  $n$ . Då gäller

$$d_{n-2}^f(1) = (3n-2) \frac{(n+1)!}{4!} a_n + \frac{n!}{2!} a_{n-1} + (n-2)! a_{n-2}$$

och om vi betraktar detta som de tre lägstgradstermerna i  $d_i^f(1)$  så sätter vi  $n - 2 = i$  och får

$$d_i^f(1) = i! a_i + \frac{(i+2)!}{2!} a_{i+1} + (3i+4) \frac{(i+3)!}{4!} a_{i+2} + G$$

där  $G$  om inte 0 består av termer  $a_{i+3}, \dots, a_n$ .

Detta kunde vi beräkna m.h.a sats 3.15 med våra  $A_k^i$ . Skillnaden är att här har vi ett enkelt uttryck av differensrad  $i$  och det ger att vi smidigt kan bestämma de tre högstgradskoefficienterna.

*Exempel 36.* Bestäm polynom  $p(x)$  som interpolerar talföljd  $f$  i differenstabell.

$x =$	1	2	3	4
$f(x) =$	2	0	6	26
$d_1 =$	-2	6	20	
$d_2 =$		8	14	
$d_3 =$		6		

Vi ser att vi kan interpolera med tredjegradspolynom. Observation 9 ger då

$$d_3(1) = 6 \stackrel{\text{enl. obs}}{=} 3!a_3 \iff a_3 = 1$$

$$d_2(1) = 8 \stackrel{\text{enl. obs}}{=} 2!a_2 + \frac{4!}{2!}a_3 = 2a_2 + 12 \iff a_2 = -2$$

$$d_1(1) = -2 \stackrel{\text{enl. obs}}{=} 1!a_1 + \frac{3!}{2!}a_2 + (3 \cdot 1 + 4)\frac{4!}{4!}a_3 = a_1 - 6 + 7 \iff a_1 = -3.$$

För att bestämma  $a_0$  använder vi följd 3.9 som ger

$$a_0 = d_0(1) - d_1(1) + d_2(1) - d_3(1) = 2 - (-2) + 8 - 6 = 6.$$

Alltså har vi att  $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$ .

För att kunna visa t.ex sats 3.17 använde vi lemma 3.16 som sade oss att då  $t = 2$  har vi att  $d_1^f = K_{n-1,t}(\delta_t(f)) + R$ . Motsvarande visade sig också gälla då  $t = 3$ . Även om vi inte direkt ska använda det här måste man ställa sig frågan, är detta sant för alla  $t$ ?

**Proposition 3.22.** *Låt  $f$  vara polynom av grad  $n$  och låt  $t$  vara heltal med  $1 \leq t \leq n$ . Då gäller*

$$d_1^f = K_{n-1,t}(\delta_t(f)) + R$$

där  $R$  består av termer som har lägre grad än grad  $f^{(t)}$  och speciellt

$$d_1^f = \delta_n(f).$$

*Bevis.* Vi visar det andra påståendet, då följer det första omedelbart. Låt  $f$  vara polynom av grad  $n$ . Då har vi att differenspolynomet

$$(4) \quad d_1^f = f(x+1) - f(x) = \sum_{k=0}^n a_k ((x+1)^k - x^k) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^{k-1} a_k \binom{k}{\ell} x^\ell.$$

Å andra sidan har vi

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \delta_n(f) &= f' + \frac{f''}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}}{n!} = \sum_{\mu=1}^n \frac{D^\mu f(x)}{\mu!} = \sum_{\mu=1}^n D^\mu \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\mu!} x^k = \\
 &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{k=\mu}^n \frac{a_k}{\mu!} D^\mu x^k = \sum_{\mu=1}^n \sum_{k=\mu}^n \frac{a_k}{\mu!} k(k-1)\dots(k-\mu+1)x^{k-\mu} = \\
 &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{k=\mu}^n a_k \binom{k}{\mu} x^{k-\mu} = \sum_{k=1}^n \sum_{\mu=1}^k a_k \binom{k}{\mu} x^{k-\mu} \stackrel{\text{subst } \ell=k-\mu}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=0}^{k-1} a_k \binom{k}{\ell} x^\ell.
 \end{aligned}$$

Vi har visat att (4)=(5) och är då klara.  $\square$

*Anmärkning 12.* Delkapitel 3.6 består delvis av sena resultat och är därför inte särskilt strömlinjeformat. Både lemma 3.16 och 3.19 kan ersättas med proposition 3.22 och allmänt följer resultaten för två termer mer eller mindre direkt ur de för tre termer.

#### 4. DISKRET INTEGRATION

Fram till nu har vi utgått från en talföljd och det som står nedanför den i differenstabellen vilket vi jämfört med derivata. Nu ska vi höja blicken och tänka oss vad som skulle kunna stå ovanför. Antag att vi vill summera talföljd som ges av  $p(x) = x^2$ . Vi skriver ut några värden på  $p$ .

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16$$

Denna talföljd utgör då en differensföljd och följdaktligen kan vi summera tal för tal, t.ex  $1 + 4 = 5$ ,  $1 + 4 + 9 = 14$  och skriva det ovanför.

$$1 \quad 5 \quad 14 \quad 30$$

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16$$

Eftersom summaföljden uppfyller att stå i differenstabellen vet vi genast en hel del. Den har t.ex samma konstanta differens som  $p$  och ges av ett tredjegrads-polynom. Vi kan helt enkelt använda våra resultat från kapitel 3 då vi studerar den.

##### 4.1. Summapolynom.

**Definition 4.1.** Låt  $p$  vara polynom. **Summapolynomet**  $S^p$  är då polynomet

$$S^p(x) = \sum_{k=1}^{x-1} p(k).$$

*Anmärkning 13.*  $S$  är en linjär operator, d.v.s för två polynom  $p$  och  $f$  gäller att  $S^{p+f} = S^p + S^f$  och även att  $S^{cf} = cS^f$  där  $c$  är en konstant.

Eftersom  $d_1^{S^p} = p$  kan vi sätta in  $S^p$  i differenstabell för polynom.

$$\begin{array}{ccccc} S^p(x) & & S^p(x+1) & & S^p(x+2) \\ & p(x) & & p(x+1) & \\ & & d_1^p(x) & & \end{array}$$

Frågan man ställer sig då är om det gäller allmänt att ett polynom  $f$  i en polynomtabel är summapolynom för  $d_1^f$ ?

**Sats 4.1.** *Låt  $p$  vara polynom och antag att  $V$  är ett polynom som uppfyller  $d_1^V = p$ . Då gäller*

$$S^p = V - V(1)$$

*Bevis.* Följd 3.11 säger

$$f(a+m) = f(a) + \sum_{k=0}^{m-1} d_1^f(a+k).$$

Låt  $f = V$ , då har vi att  $d_1^f = p$ . Vi ska summera från 1 till  $x-1$ , låt därför  $a = 1, m = x-1$  och vi får

$$V(1+x-1) = V(1) + \sum_{k=0}^{x-2} p(1+k) \iff V(x) - V(1) = \sum_{k=1}^{x-1} p(k).$$

□

*Exempel 37.* Låt oss betrakta en differenstabell med element ur  $\mathbb{R}[x]$ . Polynomen som står här uppfyller villkoren, d.v.s ett polynom  $V(x)$  följs till höger av  $V(x+1)$  och  $d_1^V = f$ .

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} & & & & & \\ & 2x+1 & x^2+2x+1 & & x^2+4x+4 & & x^2+6x+9 \\ & & & 2x+3 & & 2x+5 & \\ & & & & 2 & & \end{array}$$

Vi väljer ett polynom,  $f(x) = 2x+3$ . Då har vi att  $V(x) = x^2+2x+1$  och vi får  $S^f(x) = V(x) - V(1) = x^2+2x-3$ .

Om vi sätter operatorerna  $d$  och  $S$  på varandra kan vi se att vi får något som liknar derivata vilken är entydig respektive primitiv funktion där man får beakta en konstant.

*Observation 10.* Låt  $p$  vara polynom. Då har vi

- $d^{S^p} = p$
- $S^{d^p} = p - p(1)$

Då vi använder  $d$  upprepat får vi differenspolynom men låt oss se på ett exempel där vi låter  $S$  verka flera gånger?

*Exempel 38.* Låt  $p(x) = x^2$ . Bestäm  $S_2^{d_2}$ .

Vi vill undvika arbetet att först beräkna differenspolynom och sedan summapolynom, därför utvecklar vi

$$\begin{aligned} S_2^{d_2} &= S^{d_1-d_1(1)} = S^{d_1} - S^{d_1(1)} = p - p(1) - d_1(1)(x-1) = p - p(1) - d_1(1)x + d_1(1) = \\ &= p - d_1(1)x + p(2) - 2p(1) = p - (p(2) - p(1))x + p(2) - 2p(1) = x^2 - (4-1)x + 4 - 2 = \\ &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

$V(x)$  kan vi också använda utan att vi vet hur den ser ut. Den uppfyller villkoret  $d_1^V = p$  och det tillsammans med att vi vet förhållandet  $V$  och  $S^p$  räcker för att vi ska kunna bestämma  $S^p$  m.h.a av Newtonpolynom.

**Sats 4.2.** Låt  $p$  vara polynom av grad  $n$ , då gäller

$$S^p = \sum_{i=1}^{n+1} d_{i-1}^p(1)\eta_i$$

*Bevis.* Antag att  $p$  är polynom av grad  $n$  och att  $V$  är ett polynom som uppfyller  $d_1^V = p$ . Sats 3.13 ger då

$$V = \sum_{i=0}^{n+1} d_i^V(1)\eta_i.$$

Vidare vet vi av sats 4.1 hur vi då ska bestämma  $S^p$ .

$$S^p = V - V(1) = \sum_{i=0}^{n+1} d_i^V(1)\eta_i - d_0^V(1)\eta_0 = \sum_{i=1}^{n+1} d_i^V(1)\eta_i = \sum_{i=1}^{n+1} d_{i-1}^p(1)\eta_i.$$

□

*Exempel 39.* Låt  $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ . Bestäm  $S^p(x)$ .

Vi gör differensstabell tillräckligt stor för att få  $d_3(1)$ .

$x =$	1	2	3	4
$p(x) =$	1	5	17	43
$d_1 =$		4	12	26
$d_2 =$			8	14
$d_3 =$				6

Sats 4.2 ger då

$$\begin{aligned} S^p(x) &= \sum_{i=1}^4 d_{i-1}^p(1)\eta_i = 1(x-1) + 4\frac{(x-1)(x-2)}{2!} + 8\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} + \\ &+ 6\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4!} = \dots = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{6} + \frac{11x^2}{4} - \frac{17x}{6} + 1 \end{aligned}$$

Alltså,  $S^p(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{7x^3}{6} + \frac{11x^2}{4} - \frac{17x}{6} + 1$

**4.2. Koefficienter till summapolynom.** I kapitel 3 arbetade vi längs två huvudlinjer. Dels bestämma ett polynom med en interpolationsformel, dels bestämma dess koefficienter explicit. Vad gäller summor har vi nu klarat av den första biten och ska nu ta vi itu med den andra. Det verkar rimligt att betrakta summapolynom till monom.

Låt  $f(x) = x^{n-1}$ . Vi vill veta vad  $S^f(x) = \sum_{k=1}^{x-1} k^{n-1}$  är explicit. Av sats 4.1 vet vi att  $S^f$  är av grad  $n$  och ansätter

$$S^f(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j.$$

Vidare vet vi att  $f(x) = S^f(x+1) - S^f(x)$  och kan då därur beräkna  $S^f$  rekursivt genom att jämföra koefficienter per grad.

$$\begin{aligned} (6) \quad S^f(x+1) - S^f(x) &= x^{n-1} \iff \\ a_n((x+1)^n - x^n) + a_{n-1}((x+1)^{n-1} - x^{n-1}) + \dots + a_0 - a_0 &= x^{n-1} \iff \\ \binom{n}{1} a_n x^{n-1} = x^{n-1} &\iff n a_n = 1 \iff a_n = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

För grad lägre än  $n-1$  är höger led 0. Vi beräknar några koefficienter.

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} a_n + \binom{n-1}{1} a_{n-1} = 0 &\iff \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{1}{n} + (n-1) a_{n-1} = 0 \iff \\ a_{n-1} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} a_n + \binom{n-1}{2} a_{n-1} + \binom{n-2}{1} a_{n-2} = 0 &\iff \\ (n-2) a_{n-2} = \frac{1}{2} \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} - \frac{n!}{3!(n-3)!} \frac{1}{n} &\iff \\ a_{n-2} = \frac{n-1}{4} - \frac{n-1}{6} = \frac{n-1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{4} a_n + \binom{n-1}{3} a_{n-1} + \binom{n-2}{2} a_{n-2} + \binom{n-3}{1} a_{n-3} = 0 &\iff \\ a_{n-3} = -\frac{\binom{n}{4} a_n + \binom{n-1}{3} a_{n-1} + \binom{n-2}{2} a_{n-2}}{n-3} &= \\ = \frac{(n-1)!}{4!(n-3)!} - \frac{(n-1)!}{12(n-3)!} + \frac{(n-1)!}{4!(n-3)!} &= 0 \end{aligned}$$

Vi ser mönstret och skriver direkt.

$$\begin{aligned}
a_{n-4} &= -\frac{\binom{n}{5}a_n + \binom{n-1}{4}a_{n-1} + \binom{n-2}{3}a_{n-2} + \binom{n-3}{2}a_{n-3}}{n-4} = \\
&= -\left(\frac{n!}{5!n(n-4)!} - \frac{(n-1)!}{2 \cdot 4!(n-4)!} + \frac{(n-1)!}{12 \cdot 3!(n-4)!} + 0\right) = \\
&= -\frac{2(n-1)!}{2 \cdot 5!(n-4)!} + \frac{5(n-1)!}{2 \cdot 5!(n-4)!} - \frac{10}{3} \cdot \frac{(n-1)!}{2 \cdot 5!(n-4)!} = -\frac{(n-1)!}{6!(n-4)!}
\end{aligned}$$

Låt oss pusta ut och kontrollera det vi fått fram i ett exempel. Först måste vi dock konstatera en sak.

*Observation 11.* Summapolynom till ickekonstant monom innehåller inte konstant term  $a_0$ .

Varför? Låt  $f(x) = x^{n-1}$ . Då har vi enligt följd 3.11 att  $S^f(0) + f(0) + f(1) = S^f(2) = f(1) \iff S^f(0) + 0 + 1 = 1$  vilket ger att  $S^f(0) = 0$ .

*Exempel 40.* En inte ovanlig uppgift är att man ska gissa en summaformel och sen visa att den stämmer med ett induktionsbevis. Låt oss ta ett sådant problem, observera att vi inte behöver göra något induktionsbevis.

Bestäm  $S(x) = \sum_{k=1}^{x-1} k^3$ .

Vi ser att  $S$  är av grad 4 och för att beräkna  $a_1, \dots, a_n$  kan vi då m.h.a våra uträkningar ovan skriva

$$S(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{x^{n-1}}{2} + \frac{(n-1)x^{n-2}}{12} + 0 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$

Våra koefficientberäkningar är något yviga men eftersom de är rekursiva till sin natur går det bra att uttrycka dem koncentrerat.

*Observation 12.* Rekursionsformel för att beräkna koefficienter till summapolynom för ickekonstant monom.

Låt  $f(x) = x^{n-1}$  och låt  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vara koefficienter till  $S^f(x)$ . Då har vi

$$b_j = \sum_{k=j+1}^n \binom{k}{j} a_k$$

där

$$\begin{cases} b_{n-1} = 1 \\ b_{n-2}, \dots, b_0 = 0. \end{cases}$$

*Bevis.* Låt  $f(x) = x^{n-1}$  och  $S^f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Då har vi

$$\begin{aligned} x^{n-1} &= S^f(x+1) - S^f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x+1)^k - \sum_{k=0}^n a_k x^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_k x^j - \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k x^j - \sum_{j=0}^n a_j x^j = \\ &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k - a_j \right) x^j = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=j+1}^n \binom{k}{j} a_k \right) x^j = \sum_{j=0}^n b_j x^j \end{aligned}$$

där  $b_j = \sum_{k=j+1}^n \binom{k}{j} a_k$ . Eftersom  $f$  är av grad  $n-1$  har vi att  $b_{n-1} = 1$  och  $b_{n-2}, \dots, b_0 = 0$ .  $\square$

*Exempel 41.* Låt  $f(x) = x^{n-1}$ . Beräkna m.h.a rekursionsformeln  $a_n$  och  $a_{n-1}$  i  $S^f(x)$ .

$$1 = b_{n-1} = \sum_{k=n}^n \binom{k}{n-1} a_k = \binom{n}{n-1} a_n = n a_n \iff a_n = \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} 0 = b_{n-2} &= \sum_{k=n-1}^n \binom{k}{n-2} a_k = \binom{n-1}{n-2} a_{n-1} + \binom{n}{n-2} a_n = \\ &= (n-1) a_{n-1} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n} \iff a_{n-1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Detta arbete blir ganska omfattande för monom av högre grad varför vi presenterar dem i en tabell utan att redovisa fler beräkningar.

Tabell över koefficienter för polynomet  $S(x) = \sum_{j=1}^n a_j x^j = \sum_{k=1}^{x-1} k^{n-1}$ .

$a_n =$	$\frac{1}{n}$	$a_{n-6} =$	$\frac{(n-1)!}{6 \cdot 7!(n-6)!}$	$a_{n-12} =$	$-\frac{691(n-1)!}{15!(n-12)!}$
$a_{n-1} =$	$-\frac{1}{2}$	$a_{n-7} =$	$0$	$a_{n-13} =$	$0$
$a_{n-2} =$	$\frac{n-1}{12}$	$a_{n-8} =$	$-\frac{3(n-1)!}{10!(n-8)!}$	$a_{n-14} =$	$\frac{(n-1)!}{12 \cdot 13!(n-14)!}$
$a_{n-3} =$	$0$	$a_{n-9} =$	$0$	$a_{n-15} =$	$0$
$a_{n-4} =$	$-\frac{(n-1)!}{6!(n-4)!}$	$a_{n-10} =$	$\frac{10(n-1)!}{12!(n-10)!}$	$a_{n-16} =$	l.s.övning
$a_{n-5} =$	$0$	$a_{n-11} =$	$0$	$a_{n-17} =$	$0$

Observera att summapolynom  $S$  till ickekonstant monom inte innehåller konstant term  $a_0$ .

*Anmärkning 14.* Med hjälp av ovanstående tabell kan vi bestämma summapolynom för monom av grad 17 eller lägre. För dessa kända koefficienter kan vi se några mönster. Alla  $a_{n-k}$  där  $k$  är udda utom  $a_{n-1}$  är 0. Alla  $a_{n-k}$  där  $k$  är multipel av 4 är negativa och slutligen har vi för alla kända koefficienter att  $a_{n-k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \cdot c_{n-k}$  där vi kan bestämma  $c_{n-k}$  rekursivt.

*Anmärkning 15.* Ibland vill man bestämma summapolynom  $S(x+1) = \sum_{k=1}^x k^{n-1}$ . Ovanstående tabell gäller även i detta fall om man utför en ändring och det är att byta tecken på  $a_{n-1}$ .

*Observation 13.* Koefficienter till summapolynom m.h.a linjär algebra. Ekvation 6 ger upphov till ekvationssystem som vi kan skriva på matrisform.

$$\begin{bmatrix} \binom{n}{1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \binom{n}{2} & \binom{n-1}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{n}{3} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-2}{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-2}{n-2} & \cdots & \cdots & \binom{1}{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi betecknar matriserna ovan med  $Bc = b$ . Eftersom  $B$  är triangulär med alla diagonalelement  $\neq 0$  så är  $B$  inverterbar. Vi kan skriva  $c = B^{-1}b$  och på så sätt bestämma koefficienterna till summapolynom för ickekonstant monom.

*Exempel 42.* Låt  $f(x) = x^4$ . Bestäm summapolynomet  $S^f(x) = \sum_{k=1}^{x-1} k^4$ . Vi använder matriser  $Bc = b$  för  $n = 5$ .

$$\begin{aligned} Bc = b \iff c = B^{-1}b \iff \begin{bmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

och vi kan här se att  $S^f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$ .

För att bli fullständiga måste vi också fastslå vad summapolynomet till ett konstant monom är.

*Observation 14.* Låt  $p(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Då har vi att

$$S^p(x) = \sum_{k=1}^{x-1} c = c(x-1).$$

Ett polynom  $p$  består av monom. Bestämmer man summapolynom till vart och ett av dessa och adderar resultaten får man summapolynom för  $p$ .

*Exempel 43.* Låt  $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ . Bestäm  $S^p(x) = \sum_{k=1}^{x-1} p(k)$ . Först separerar vi monomen

$$S^p(x) = \sum_{k=1}^{x-1} (2k^2 - 3k + 4) = \sum_{k=1}^{x-1} 2k^2 - \sum_{k=1}^{x-1} 3k + \sum_{k=1}^{x-1} 4 = 2 \sum_{k=1}^{x-1} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{x-1} k + 4 \sum_{k=1}^{x-1} 1.$$

Sedan beräknar vi m.h.a rekursionsformeln i obs 12 eller vår tabell summapolynom för varje monom. För den första har vi  $n = 3$ , den andra  $n = 2$  och den sista är en konstant. Vi får då

$$\begin{aligned} S^p(x) &= 2 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \right) - 3 \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right) + 4(x-1) = \\ &= \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + \frac{35x}{6} - 4. \end{aligned}$$

Om man vill kontrollera att man bestämt  $S^p$  kan man naturligtvis jämföra talföljder av  $p$  och  $S$  men en första kontroll kan vara att se att  $S^p(1) = 0$  vilket följer av sats 4.1. Vidare ser vi m.h.a observationer 11 och 14 att om polynom  $p$  har konstant term  $c$  kommer  $S^p$  ha konstant term  $-c$ .

**4.3. Några egenskaper för summor.** Antag att vi ritar grafen till monomet  $f(x) = x^{n-1}$ ,  $x \geq 0$ . Då kan man se produkten  $xf(x) = x^n$  som en rektangelarea. Antag vidare att  $x$  är ett heltal. Då kan vi dela upp denna area i två kategorier, dels i stående kolonner som alla har baslängd 1 och dels i liggande radareor.

figur

Summan av alla kolonner känner vi igen, den blir  $S^f(x+1) = \sum_{k=1}^x k^{n-1}$ . Om en radarea har längd  $x$  kommer den att ha höjd  $f(x+1) - f(x) = d_1^f(x)$  och har då area  $xd_1^f(x)$ . Radsumman blir  $\sum_{k=1}^{x-1} kd_1^f(k)$  och då vi nu kan uttrycka vår rektangelarea på två sätt skriver vi

$$x^n = \sum_{k=1}^x k^{n-1} + \sum_{k=1}^{x-1} kd_1^f(k)$$

där  $f(x) = x^{n-1}$ ,  $x \in \mathbb{Z}_+$ .

$f(x) = x^{n-1}$  är ett positivt och växande monom men detta gäller allmänt för polynom vars graf då skulle kunna skära  $x$ -axeln upprepade gånger.

**Lemma 4.3.** *Låt  $p$  vara polynom och  $x \in \mathbb{Z}_+$ , då gäller*

$$xp(x) = \sum_{k=1}^x p(k) + \sum_{k=1}^{x-1} kd_1^p(k).$$

*Bevis.* Låt  $p$  vara polynom. Vi gör induktionsbevis över  $x$ .  
Då  $x = 1$  är påståendet sant, ty

$$\sum_{k=1}^1 p(k) + \sum_{k=1}^0 kd_1^p(k) = p(1) + 0 = 1 \cdot p(1)$$

Antag att påståendet stämmer för något positivt heltal  $x$ , d.v.s

$$xp(x) = \sum_{k=1}^x p(k) + \sum_{k=1}^{x-1} kd_1^p(k).$$

Vi ska då visa att det stämmer för  $x + 1$  genom att addera med nästa term i summorna.

$$xp(x) + p(x + 1) + x(p(x + 1) - p(x)) = (x + 1)p(x + 1)$$

Av induktionsaxiomet följer då att påståendet gäller för alla positiva heltal  $x$ .  $\square$

Det finns ett antal välkända identiteter som innehåller binomialkoefficienter, ett rent exempel är  $\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0$ . De är ofta användbara varför vi ska visa en sådan för summor.

*Observation 15.* Då  $x, n \in \mathbb{Z}_+$  så gäller

$$x^n - \binom{n}{1} \sum_{k=1}^x k^{n-1} + \binom{n}{2} \sum_{k=1}^x k^{n-2} - \binom{n}{3} \sum_{k=1}^x k^{n-3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \sum_{k=1}^x k^0 = 0$$

Vi gör ett bevis där vi får användning för lemma 4.3 men säkert går det att visa detta smidigare.

*Bevis.* Låt  $f = x^{n-1}$ . Vi vet då av lemma 4.3 att

$$(7) \quad x^n = \sum_{k=1}^x k^{n-1} + \sum_{k=1}^{x-1} kd_1^f(k)$$

Betrakta nu  $\sum_{k=1}^{x-1} kd_1^f(k)$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{x-1} kd_1^f(k) &= \sum_{k=1}^{x-1} k \left( (k+1)^{n-1} - k^{n-1} \right) = \sum_{k=1}^x (k-1) \left( k^{n-1} - (k-1)^{n-1} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^x (k-1) \left( \binom{n-1}{1} k^{n-2} - \binom{n-1}{2} k^{n-3} + \dots + (-1)^n \binom{n-1}{n-1} k^0 \right) = \\
&= \sum_{k=1}^x \left( \left( \binom{n-1}{1} k^{n-1} - \binom{n-1}{2} k^{n-2} + \dots + (-1)^n \binom{n-1}{n-1} k \right) - \right. \\
&\quad \left. - \left( \binom{n-1}{1} k^{n-2} - \binom{n-1}{2} k^{n-3} + \dots + (-1)^n \binom{n-1}{n-1} k^0 \right) \right) = \\
&= \sum_{k=1}^x \left( \binom{n-1}{1} k^{n-1} - \left( \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right) k^{n-2} + \right. \\
&\quad \left. + \left( \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} \right) k^{n-3} - \dots + (-1)^n \left( \binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right) k - \right. \\
&\quad \left. - (-1)^n \binom{n-1}{n-1} k^0 \right) = \\
&= \sum_{k=1}^x \left( \binom{n-1}{1} k^{n-1} - \binom{n}{2} k^{n-2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n-1} k - (-1)^n \binom{n-1}{n-1} k^0 \right)
\end{aligned}$$

Vi sätter nu in detta sista hårt förvärvade uttryck i ekvation (7) och får

$$\begin{aligned}
(8) \quad x^n &= \sum_{k=1}^x k^{n-1} + \\
&+ \sum_{k=1}^x \left( \binom{n-1}{1} k^{n-1} - \binom{n}{2} k^{n-2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n-1} k - (-1)^n \binom{n-1}{n-1} k^0 \right)
\end{aligned}$$

och eftersom vi vet att  $1 + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{1}$  och att  $\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}$  delar vi upp vår summa i termer, flyttar ut binomialkoefficienterna och kan då skriva ekvation (8)

$$\begin{aligned}
x^n &= \binom{n}{1} \sum_{k=1}^x k^{n-1} - \binom{n}{2} \sum_{k=1}^x k^{n-2} + \dots - (-1)^n \binom{n}{n} \sum_{k=1}^x k^0 \iff \\
x^n - \binom{n}{1} \sum_{k=1}^x k^{n-1} + \binom{n}{2} \sum_{k=1}^x k^{n-2} - \binom{n}{3} \sum_{k=1}^x k^{n-3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \sum_{k=1}^x k^0 &= 0
\end{aligned}$$

□

Vi ser på ett litet exempel där vi skriver ut dessa summor.

*Exempel 44.* Låt  $x = 5$  och  $n = 3$ . Observation 15 ger då

$$5^3 - \binom{3}{1} \sum_{k=1}^5 k^2 + \binom{3}{2} \sum_{k=1}^5 k - \binom{3}{3} \sum_{k=1}^5 1 = 0 \iff$$

$$5^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1).$$

I kapitel 3 har vi följd 3.11 som man väl får säga är ett trivialt resultat. Det kom dock till användning när vi skulle visa sats 4.1 som ger att vi kan bestämma summapolynom ur en polynomtabellell. Vi avslutar nu detta kapitel med en sats där vi mixar följd 3.11 med än starkare krut.

**Proposition 4.4.** Låt  $f(x) = x^n$  vara monom med  $n \geq 3$ . Då finns det inte någon delföljdsomma  $\Lambda$  av  $d_1^f$

$$\Lambda = \sum_{k=j}^m d_1^f(k) \quad 1 \leq j \leq m$$

så att  $\Lambda = f(x)$  för  $x \in \mathbb{Z}_+$ .

För att visa detta behöver vi ett lemma.

**Lemma 4.5.** För heltal  $n \geq 3$  finns det inte  $a, b, c \in \mathbb{Z}_+$  så att

$$a^n + b^n = c^n.$$

Av historiska skäl avstår vi från att visa lemmat här då beviset inte får plats i marginalen.

*Bevis.* (Proposition 4.4). Låt  $f(x) = x^n$  vara monom med  $n \geq 3$ . Antag att det finns  $x, j, m \in \mathbb{Z}_+$  så att

$$(9) \quad f(x) = \sum_{k=j}^m d_1^f(k) \quad 1 \leq j \leq m$$

Vi manipulerar (9)

$$f(x) = f(1) - f(1) + \sum_{k=1}^m d_1^f(k) - \sum_{k=1}^{j-1} d_1^f(k) \iff$$

$$f(x) + f(1) + \sum_{k=1}^{j-1} d_1^f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^m d_1^f(k)$$

och följd 3.11 ger att detta kan skrivas

$$f(x) + f(j) = f(m+1) \iff x^n + j^n = (m+1)^n$$

vilket motsägs av lemma 4.5. □

*Anmärkning 16.* Lemma 4.5 är känd som Fermats sista sats vilken formulerades 1637 av Pierre de Fermat och bevisades 1994 av Andrew Wiles.

## 5. HÄRIFRÅN OCH VIDARE

Vi ska avsluta genom att ge några exempel på frågor som inte är helt utredda och som man kan fundera vidare över.

## 5.1. Några lösa trådar.

*Exempel 45.* När vi interpolerar med polynom använder vi sats 2.1 som man skulle kunna benämna fundamentalsats inom området. Vi har bara visat den fullt ut för de fall som speciellt intresserar oss. Därför måste det stå högt upp på listan att fullfölja beviset för det allmänna fallet.

*Exempel 46.* I kapitel 3.2 såg vi på exponentiella talföljder och antydde att det kunde löna sig att se på vänstra diagonalen i differens Tabellen om man vill gissa ett uttryck som ger följderna. Om man betraktar denna vänsterdiagonal, man kan säga att man roterar upp den 60 grader till huvudföljdläge och studerar dess differenser får man en ny vänsterdiagonal. Antalet sådana rotationer innan man får  $d_1 = 0$  kommer att säga oss något om basen i det exponentiella uttrycket. Vidare kan man se på blandningar av dessa uttryck med polynom.

*Exempel 47.* Sats 3.20 låter oss bestämma tre termer i ett differenspolynom  $d_i$  m.h.a derivata. Det man önskar sig är ett allmänt resultat så att vi på samma sätt kan bestämma alla termer.

*Exempel 48.* De flesta av våra resultat är för differenspolynommiljö och även om vi vid några tillfällen hittat andra användningsområden så vill vi gärna hitta fler. Med hjälp av proposition 3.22 kan vi skriva differenspolynom  $d_1$  på formen derivata och därmed borde vi kunna anpassa en del resultat för en mer allmän situation.

*Exempel 49.* Vi gjorde några iakttagelser för kända koefficienter till summapolynom i anmärkning 14. Önskvärt vore att visa om dessa iakttagelser gäller allmänt. Vi saknar också ett explicit uttryck för  $c_{n-k}$ . Troligen kan man komma vidare här om man betraktar något som kallas Bernoullital.

**5.2. Umbral calculus?** Vi har nu studerat polynom och deras talföljder och försökt kartlägga denna korrespondens. Även om vi ägnat oss mycket åt att hitta mer eller mindre komplicerade interpolationsmetoder så är det själva kartan som är det viktiga, d.v.s ofta ganska triviala iakttagelser. Förhoppningen är att detta arbete ska kunna utgöra en grund för vidare studier inom ämnesområdet och då infinner sig frågan, vad är det för ämnesområde? Troligen hör vi hemma lika mycket i den diskreta matematiken som i analysen. Termen umbral calculus myntades av James Sylvester (1814-1897) och i denna gren av matematiken studerar man sekvenser av polynom med en blandning av operator och kombinatorikmetoder. Det verkar som om den beskrivningen i alla fall delvis passar in på detta arbete varför det kan vara en väg härifrån och vidare.

## 6. TACK

Jag vill tacka min handledare Jörgen Boo inte bara för att han givit proffsig handledning utan också för att han engagerat sig i min upptäckarglädje och matematiska utveckling. Tack också till Pia Heidtmann som ställer upp som opponent samt till Stefan Borell och Per Åhag för datahjälp.

## 7. LISTA ÖVER SYMBOLER

$\mathbb{N}$	Mängden naturliga tal, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	
$\mathbb{Z}$	Mängden heltal	
$\mathbb{R}$	Mängden reella tal	
$\mathbb{R}[x]$	Ringens av polynom med koefficienter i $\mathbb{R}$	
dim	dimension av vektorrum	
$\mathcal{D}$	Datamängd	se definition 2.1
$\mathcal{P}_n$	Vektorrum, alla polynom av högst grad $n$ i $\mathbb{R}[x]$	definition 2.2
$\Delta_k$	Dividerade differensen, Newton	beskrivning 1
$L_k(x)$	Lagrangepolynom	beskrivning 2
$\delta_k^j$	Kroneckers delta	lemma 2.2
$d_i^p$	Differenspolynom	definition 3.2
$d$	Differensoperator	anmärkning 7
$d_n$	Ofta för konstant differens	sats 3.2
$\eta_i$	Newtonpolynom	definition 3.4
$\varphi$	Funktion för att transformera	anmärkning 9
$A_k^i$	Vid linjärkombination av $d_i(1)$	sats 3.15
$\delta_t$	Differentialoperator	definition 3.5
$\Pi_{n,t}$	Projektionsoperator	definition 3.6
$K_{n,t}$	Projektionsoperator	definition 3.6
$D$	Differentialoperator	proposition 3.22
$S^p$	Summapolynom	definition 4.1
$S$	Summaoperator	anmärkning 13

## 8. LITTERATURLISTA

Beta, Mathematics Handbook Lennart Råde, Bertil Westergren.  
Studentlitteratur, Lund 1988.

Boken om tal John H.Conway, Richard K.Guy.  
Studentlitteratur Lund 2000.

Introduction to Real Analysis Robert G.Bartle, Donald R.Sherbert.  
John Wiley & Sons.Inc. USA 2000.