

Matematik-app för elever och lärare

Helena Johansson, Malin Norberg & Magnus Österholm

Sammanfattning

Denna rapport utgör ett resultat från projektet "Matematik-app för elever och lärare", som var en samverkan mellan Mittuniversitetet och Örnsköldsviks kommun. I detta projekt genomfördes en utvärdering av matematikappen Vektor, både ur elevperspektiv och lärarperspektiv. Det övergripande syftet med projektet var att bidra till en utveckling av matematikundervisningen för yngre elever, från förskoleklass till årskurs 3 (F-3). Analyser genomfördes som fokuserade på hur appen kan användas som stöd för elevers lärande kring tallinjen och taluppfattning samt hur appen kan användas som stöd för lärares arbete med planering och utveckling av undervisningen kring detta matematikinnehåll. Resultaten påvisar flera möjligheter till att använda appen i matematikundervisningen men att det också finns vissa spänningar mellan appens egenskaper och lärares behov. Detta leder till att lärarna inte använder appen utifrån instruktionerna som anges av appens tillverkare, utan de gör visst motstånd och anpassar användningen.

Denna rapport har granskats och diskuterats på ett högre seminarium inom Nätverk för Ämnesdidaktisk forskning i Matematik och Naturvetenskap (NÄMN) vid Mittuniversitetet.

Innehållsförteckning

Sammanfattning	2
Inledning	4
Metoder	5
Analyser av appen.....	5
Samtal med lärare.....	6
Utformning av verktyget.....	7
Resultat: Appens egenskaper	8
Matematiskt innehåll.....	10
Progression i Talkompisar (Number Pals).....	11
Progression i Tallinjen (Number Line).....	14
Resultat: Lärares användning av appen	20
Slutsatser	24
Referenser	26
Bilaga 1: Egenskaper hos appar	27
Bilaga 2: Aspekter av tallinjen eller taluppfattning	30

Inledning

Denna rapport utgör ett resultat från projektet "Matematik-app för elever och lärare", som var en samverkan mellan Mittuniversitetet och Örnsköldsviks kommun. I detta projekt genomfördes en utvärdering av matematikappen Vektor, både ur elevperspektiv och lärarperspektiv. Inom kommunen hade lärare inom F-1 på några skolor testat appen Vektor. I detta arbete lyftes behov av stöd för att utveckla detta arbete, särskilt för att fokusera på matematiken i elevernas lärande. Därför genomfördes analyser som fokuserade på hur appen kan användas som stöd för elevers lärande kring tallinjen och taluppfattning samt hur appen kan användas som stöd för lärares arbete med planering och utveckling av undervisningen kring detta matematikinnehåll. Dessutom var målet att producera en första version av ett mer generellt verktyg för lärare att använda inom det kollegiala arbetet, som stöd för att använda och utvärdera såväl appar som annat undervisningsmaterial samt för planering och uppföljning av matematikundervisning.

Det övergripande syftet med projektet var att bidra till en utveckling av matematikundervisningen för yngre elever, från förskoleklass till årskurs 3 (F-3). Projektet avgränsade sig till att studera användningen av den specifika appen Vektor, där avsikten var att besvara två frågeställningar:

1. Hur kan appen Vektor användas som stöd för elevers lärande kring tallinjen och taluppfattning?
2. Hur kan appen Vektor användas som stöd för lärares arbete med planering och utveckling av undervisningen kring tallinjen och taluppfattning?

Appen Vektor innehåller inte endast övningar kring tallinjen och taluppfattning utan innehåller också övningar avseende mer generella kognitiva förmågor. Utvärderingen som presenteras i denna rapport utgör därmed ingen utvärdering av appen som helhet. Det finns andra rapporter som fokuserat på appen som helhet, avseende den typ av användning av appen som förespråkas av tillverkarna. Sådan utvärdering påvisar till exempel goda effekter på elevers lärande i matematik (Nemmi et al., 2016). Hur avgränsningen genomförts till tallinjen och taluppfattning inom denna rapport beskrivs mer specifikt i de olika delarna av metoden.

Metoder

Planen i projektet var att det skulle bygga på analyser av tre huvudsakliga delar: appens egenskaper, elevers användning av appen samt lärares användning av appen. På grund av pandemin kunde elevers användning av appen inte alls undersökas samt att lärares användning av appen fick avgränsas till samtal med lärare kring deras användning, och till exempel inte inkludera besök hos grupper av lärare som planerade sin undervisning. All kontakt med lärare fick också genomföras helt på distans.

Projektets genomförande har bestått av att först analysera appen, vilket utgjort underlag för planering och genomförande av samtal med lärare, för att på så sätt se helheter och relationer mellan appens egenskaper och lärares användning av appen, vilket tillsammans utgör underlag för utformning av ett verktyg för lärare. Här beskrivs genomförandet av dessa tre steg; analyser av appen, samtal med lärare och utformning av verktyget.

Analyser av appen

Projektet är avgränsat till lärande och undervisning kring tallinjen och taluppfattning. Därför har analyser avgränsats till två övningar i appen Vektor: talkompisar (Number Pals) och tallinjen (Number Line). Dessa övningar har analyserats genom den version av appen som kallas Vektor Flex, där specifika övningar kan väljas. Därmed har inte alla egenskaper och funktioner hos appen analyserats, såsom viss typ av feedback som ges när elever jobbar med alla övningar i det upplägg som finns i appen som helhet, då eleven inte kan välja övningar utan följer ett styrt upplägg.

Analyser av varje övning har genomförts i tre steg: först gjordes analyser baserat på forskning om appar, sedan gjordes analyser baserat på forskning om taluppfattning och tallinjen, och avslutningsvis gjordes analyser avseende progression.

För genomförandet av analyser baserat på forskning om appar söktes efter studier där det presenteras någon typ av struktur avseende olika egenskaper hos appar att fokusera på. Detta resulterade i fem studier som användes som utgångspunkt för analyser i detta projekt (Callaghan &

Reich, 2018; Cayton-Hodges et al., 2015; Handal et al., 2016; Harrison & Lee, 2018; Hawkins et al., 2017). Alla kategorier och typer av aspekter/egenskaper från dessa studier finns beskrivna i bilaga 1. För de två övningarna bedömdes om och hur varje specifik aspekt/egenskap finns inom övningen baserat på utforskande användning av appen.

För genomförandet av analyser baserat på forskning om taluppfattning och tallinjen söktes efter studier som innehåller en översikt av forskning kring taluppfattning och tallinjen. Detta resulterade i primärt tre studier som användes som utgångspunkt för analyser i detta projekt (Elofsson, 2017; Kilhman, 2011; Käser et al., 2013). Baserat på översikterna i dessa studier skapades en struktur avseende centrala perspektiv på eller aspekter av tallinjen eller taluppfattning. Denna struktur finns beskriven i bilaga 2. För de två övningarna bedömdes om och hur varje specifik aspekt finns inom övningen baserat på utforskande användning av appen.

För genomförandet av analyser avseende progression dokumenterades varje steg i de båda övningarna, med avseende på vad som ändras i övningen när en användare hela tiden svarar rätt.

Samtal med lärare

För att hitta lärare som arbetat med appen Vektor eller som har intresse för att arbeta med denna app spreds en inbjudan inom Örnsköldsviks kommunen till att delta i projektet, avseende att ha samtal kring deras erfarenheter av och reflektioner kring appen. Detta resulterade i att två lärare, med olika typer av erfarenheter kring appen Vektor, medverkade i projektet. Semi-strukturerade samtal genomfördes på distans och de spelades in för analyser. Med den första läraren genomfördes tre samtal om totalt ca 140 minuter och med den andra läraren genomfördes två samtal om totalt ca 110 minuter. Baserat på erfarenheterna av samtalen med den första läraren bedömdes att samma typ av frågor kunde behandlas inom två samtal istället för tre.

Avseende innehållet i samtalen skapades först en övergripande plan kring teman att behandla i följande ordning:

1. Öppna frågor kring hur läraren har använt och planerar att använda Vektor samt lärarens reflektioner kring användningen av Vektor.
2. Diskussioner kring Vektors potential och begränsningar, med matematikdidaktiskt fokus avseende taluppfattning och tallinjen.
3. Lärarens behov av stöd i att bedöma och använda en ny app, eller mer generellt ett nytt undervisningsmaterial.

Specifika frågor och diskussionsämnen inom ett tema baserades på vad som framkommit i ett tidigare tema eller tidigare inom samma tema. Återkommande i dessa frågor var ett fokus på elevers lärande och lärarens planering och genomförande av undervisning, speciellt kring taluppfattning och tallinjen. Frågorna byggde också på de resultat som framkommit i analyserna av appen, till exempel avseende specifika egenskaper i de två övningarna kring taluppfattning och tallinjen.

De inspelade samtalen analyserades med en explorativ ansats. Syftet med analyserna var att hitta teman kring fenomen som framkommer i samtalen, med avseende på den övergripande planen för projektet. Analyserna har därmed inte fokus på de enskilda lärarna utan på att bidra med svar på projektets huvudfrågor kring hur appen kan användas som stöd för elevers lärande och som stöd för lärarens arbete med planering och utveckling av undervisningen, kring taluppfattning och tallinjen.

Utformning av verktyget

Detta verktyg har inte skapats såsom var planen. I denna rapport finns dock en sammanställning av forskningslitteratur som kan vara användbar också för lärare i deras arbete med att använda och utvärdera appar (se bilagor).

Beslutet att inte skapa detta verktyg baserades på flera olika faktorer. För det första kunde inte det planerade underlaget skapas, avseende elevers användning av appen och lärarens planering och diskussioner kring att använda appen, där utkast av ett verktyg skulle kunna ha testats. Därmed fanns alltför begränsat underlag för att skapa ett verktyg som kan vara meningsfullt och användbart för lärare. För det andra erhöles resultat i de andra delarna av projektet som försvårade skapandet av ett verktyg inom

ramen för detta projekt. Det skulle krävas mer omfattande och djupgående analyser av dessa resultat för att utgöra underlag till skapandet av verktyget. Sådana typer av analyser kommer dock att genomföras i ett uppföljande projekt.

Resultat: Appens egenskaper

Baserat på en kombination av olika ramverk för klassificering av digital programs användning och potential inom matematikundervisningen så framträder följande egenskaper.

1. De två analyserade övningarna i appen Vektor, Number Pals och Number Line, har båda en tydlig inriktning mot matematik, specifikt taluppfattning.
2. Syftet att använda dessa båda övningarna kan vara både för att komplettera och ersätta annan matematikundervisning
3. Ingen av övningarna erbjuder möjligheter för användaren att interagera med programmet, det finns till exempel inte några öppna eller utforskande uppgifter. Båda av övningarna tolkas ha fokus på minnesträning, till exempel vilka talpar som ger en viss summa, samt på procedurträning, att använda tallinjen som metod för addition och subtraktion. Analysen visar att man kan komma ganska långt i övningsmomenten genom "trial-and-error".
4. Båda övningarna har potential att både ersätta och komplettera och förstärka annan undervisning om taluppfattning. Dels kan viss mängdträning som tidigare gjorts på liknande sätt, men inte digitalt, ersättas med övningarna i appen, dvs själva utformningen av övningarna skiljer sig inte markant åt från hur de genomförs utan digitalt verktyg. Dels kan mängdträningen ses som ett komplement till andra aktiviteter som utvecklar elevers taluppfattning. Övningarna kan också bidra med andra kompletterande representationsformer av bland annat tals ingående delar och operationerna addition och subtraktion. Dessa ökade möjligheter att lära sig matematik, utan att det matematiska innehållet förändras eller att formen för den matematiska kunskap eleverna förväntas lära sig förändras, innebär att de båda övningarna kan bidra till förstärkning av elevers taluppfattning.

5. Det finns likheter och skillnader mellan de båda övningarna med avseende på specifik utformning och tydlighet i avsikten med övningarna
- a. I övningen Number Pals framträder ett tydligt lärande, här är fokus på uppdelning av tal och tals ingående delar. I övningen Number Line framträder inte ett specifikt lärandemål lika tydligt. Övergripande fokus tycks vara att lyfta fram tallinjen som didaktiskt verktyg (modell för tal/tänkande) för att representera tal och för att representera operationerna addition och subtraktion.
 - b. Båda övningarna guidar användare genom att en animerad hand i de första övningsmomenten visas vad som ska flyttas, dras eller markeras. Vidare så finns det i övningen Number Line även en statisk pil ovanför tallinjen som visar storlek och riktning på det intervall som ska markeras.
 - c. I båda övningarna finns olika typer av feed-back. Vid (upprepade?) fel i övningen Number Pals kommer handen tillbaka och visar vad som ska flyttas. Vid fel i Number Line kommer ett nytt tal eller operation fram och om man gör upprepade fel så backar övningen tillbaka till vad som tolkas som en lägre nivå. I övningen finns bild på en trappa (tre trappsteg) med ett värde intill som förändras efterhand, detta tolkas som forma av nivågradering. I båda övningarna sker feed-back vid fel omedelbart, vilket innebär att användaren inte ges någon egen tid för reflektion.
 - d. Båda övningarna bedöms vara mycket adaptiva då varje övningsmoment anpassas efter vad eleven klarar av eller vad eleven gör fel på. Som nämnts ovan så kommer handen tillbaka i Number Pals för att guida om man gjort fel. I Number Line kommer omedelbart ett nytt tal vid fel och övningen backar till lägre nivå vid upprepade fel.
 - e. När det gäller användarvänlighet så upplevs Number Pals både intuitiv och användarvänlig. Number Line är användarvänligt, men inte lika intuitivt då det vid operationer med olika tal är möjligt att välja olika sätt att representera operationen, eller att välja att direkt representera summan. Det tillhandahålls ingen ytterligare information om de enskilda övningarna, varken via appen eller via utvecklarnas hemsida. När ett träningspass avslutas

så sparas informationen till nästa inloggning och övningen startar där man slutade. Elever kan inte själva ändra inställningar i programmet för att eventuellt anpassa efter deras specifika behov. Programvaran är inte anpassad för enkel delning av innehåll. På utvecklarnas hemsida finns en speciell FAQ-sida som bland annat innehåller rubriken teknisk support, där bland annat frågor om systemkrav och användarkonton tas upp.

Matematiskt innehåll

Analysen visade att övningen Number Line kan bidra till elevers utveckling av en symbolisk mental tallinje genom att representera tals storlek som intervall på en fysisk tallinje. Storleksrepresentation av talen kompletteras med en visuell-linjär representation i form av fyllda rektangelblock ovanför tallinjen, samt med en pil längs med tallinjen (t.ex. figur 5). Pilen kan även bidra till att storleken på tal uppfattas som avstånd. Vidare kan övningen Number Line ge elever möjlighet att uppfatta tal som en position på tallinjen i och med att vissa punkter på tallinjen är markerade med siffersymboler för tal, samt att det är vid en viss position på tallinjen som de fyllda blocken ändrar färg och visar att det är "rätt" tal som representerats.

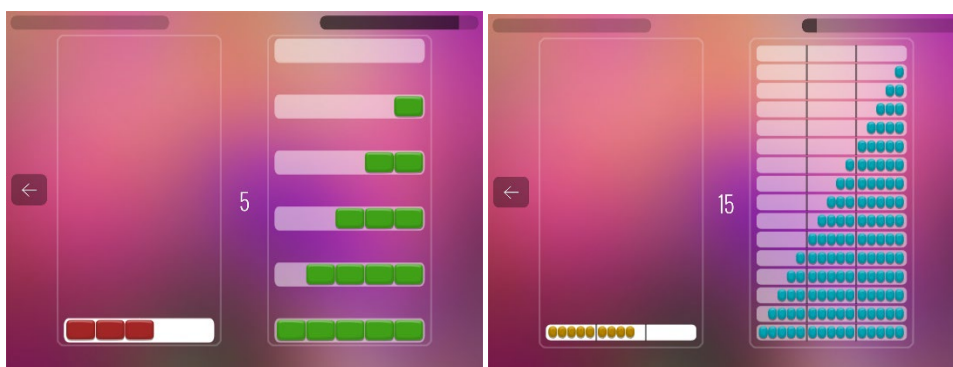
Övningen Number Line innehåller ett samspel mellan olika typer av representationer av tal. Dels mellan icke-symbolisk representation, i form av pilen, och symbolisk representation, i form av siffror, då markören på tallinjen ska flyttas längs med pilen för att markera det tal i sifferform som är centrerat ovanför tallinjen. Dels mellan ikonisk representation, i form av färgade block, och symbolisk representation, i form av siffror, i och med att "rätt" antal färgade block, som motsvara det tal som är centrerat ovanför tallinjen, byter färg. Vidare sker ett samspel mellan ikonisk representation, i form av tal i bråkform som representeras som del av helhet med hjälp av liggande och stående staplar, och siffersymboler som anges vid olika positioner på tallinjen dit markören ska flyttas för att markera det tal stapeln representerar. Den fysiska tallinjen används också som ett didaktiskt verktyg för att representera addition och subtraktion som ökning respektive minskning.

Även övningen Number Pals kan bidra till utveckling av en mental tallinje genom visuell-linjär representation av tal i form staplar fyllda med tydligt avgränsade rektanglar (t.ex. figur 1). Staplar fyllda med ett visst antal avgränsade rektanglar kan även representera storlek av tal och synliggöra denna aspekt av taluppfattning. I övningen finns samspel mellan ikonisk representation av tal, i form av färgade rektanglar, och symbolisk representation, i form av siffror, då en stapel fylld med det antal rektanglar som motsvara det tal som ska representeras ger "rätt" och låter användaren gå vidare i övningen.

I båda övningarna saknas verbal representation, både som ljud och text.

Progression i Talkompisar (Number Pals)

Analysen visade en tydlig progression i övningen Number Pals med avseende på vilka talkompisar som övades, samt hur representationen av talen förändrades från bildlig, i form av färgade block, till mer abstrakt, i form av siffersymboler. Övningen var uppbyggd av två kolumner (höger och vänster), där den talkompis som ska övas anges i sifferform mellan de båda kolumnerna (ex. figur 1). Den första talkompisen som övas är 5, sedan 10, 15 och 20. Därefter kommer moment där talkompisarna 10, 15 och 20 blandas.



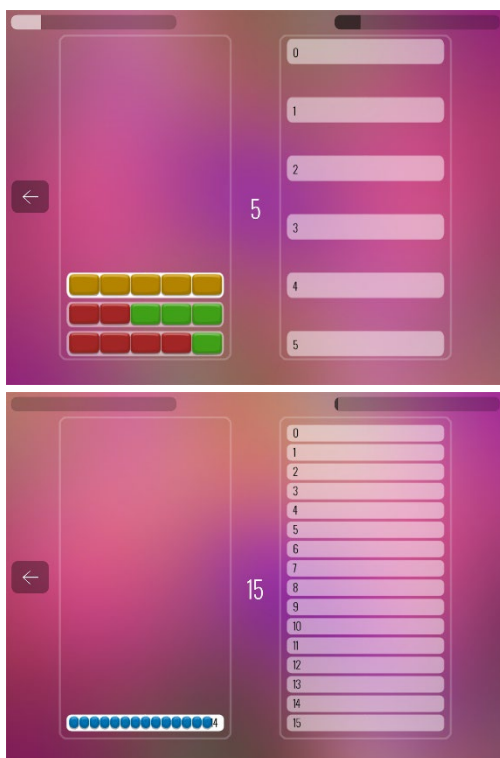
Figur 1. Exempel på moment för talkompisarna 5 och 15, Number Pals i appen Vektor.

För alla talkompisar så gäller att den högra kolumnen innehåller ett antal liggande staplar. Om talkompisen är 5 så finns det sex staplar i högra kolumnen (figur 1), om talkompisen är 10 så finns det 11 liggande staplar (figur 2), och så vidare så att alla tal från 0 till aktuell talkompis är representerad. I den vänstra kolumnen så kommer succesivt liggande staplar fram med olika tal som ska kompletteras för att ge aktuell talkompis (ex. figur 1). Från början är de liggande staplarna fyllda med olika antal tydligt avgränsade färgade block, olika färger i höger och vänster kolumn. Därefter kompletteras de färgade blocken i den högra kolumnen med siffersymboler för de olika talen (figur 2) och därefter försvinner de färgade blocken som representation och enbart siffersymbolerna syns (figur 3). För talkompisar större än 5 så finns från början markeringar för fem-intervall, med hjälp av avgränsande streck i både höger och vänster kolumn (figur 1 och 2). Intervallen ändras senare till tio-intervall (figur 2, 20-kompis) och senare tas intervallmarkeringarna bort helt (figur 3).



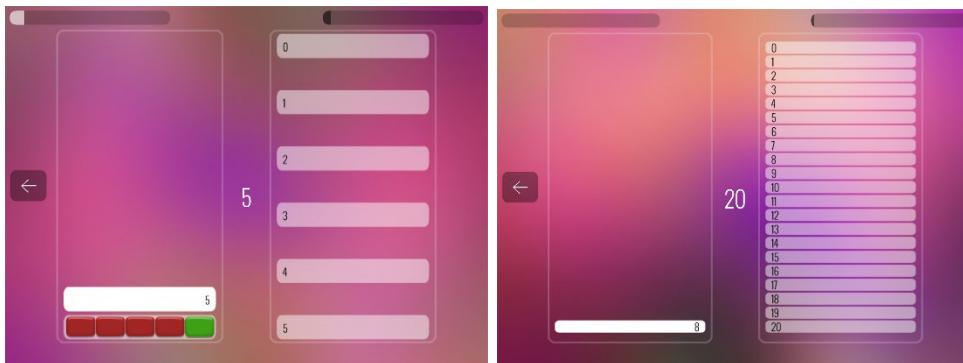
Figur 2. Exempel på moment för talkompisarna 10 och 20, Number Pals i appen Vektor.

Samtidigt som de färgade blocken försvinner som representation från högra kolumnen så ändras färg på de block som visas i den vänstra kolumnen för talkompisarna 5 och 15. För talkompisen 5 så ändras färgen på blocken i vänstra kolumnen från röd till gul (figur 3). När man drar i en liggande stapel i den vänstra kolumnen så framträder även här gula avgränsade block, och när rätt tal från höger kolumn kombinerats med talet i den vänstra kolumnen så ändras färgen igen och de ingående delarna blir röda och gröna (ursprungliga färger för talkompisen 5). För talkompisen 15 så ändras färgen från gul till blå på blocken i den vänstra kolumnen och när rätt tal kombinerats så framträder de ingående talen som block i ursprungsfärgerna gul och turkos (figur 1).



Figur 3. Exempel på moment för talkompisarna 5 och 15, Number Pals i appen Vektor.

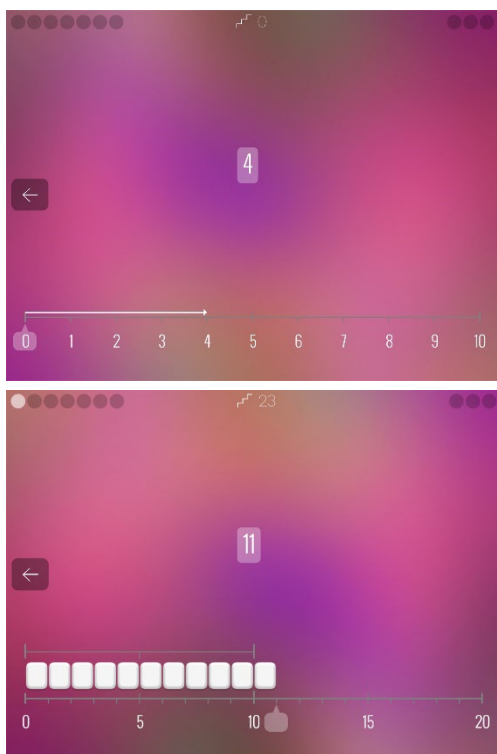
Slutligen är det endast siffersymboler som representation för de ingående talen, både i högra och vänstra kolumnen (figur 4). Precis som i föregående moment så framträder de ingående talen som färgade block och siffersymbolen försvinner i stapeln i vänstra kolumnen när rätt tal kombinerats till aktuell talkompis.



Figur 4. Exempel på moment för talkompisarna 5 och 20, Number Pals i appen Vektor.

Progression i Tallinjen (Number Line)

Analysen visade en progression i övningen Number Line med avseende på utökade talområden, från att från början omfatta talen 0-10 till att senare omfatta 0-20 (figur 5), samt utökade talmängder, från att från början omfatta de naturliga talen (figur 5, 6, 7 och 8) till att senare inkludera positiva rationella tal (figur 9). Det fanns även en viss progression inom varje övningsmoment, där först ensamma tal ska representeras med hjälp av tallinjen (figur 5 och 9) till att det senare är operationerna addition och subtraktion av två termer som ska representeras med hjälp av tallinjen (figur 6 och 7), och slutligen en kombination av addition och subtraktion av tre termer (figur 8).

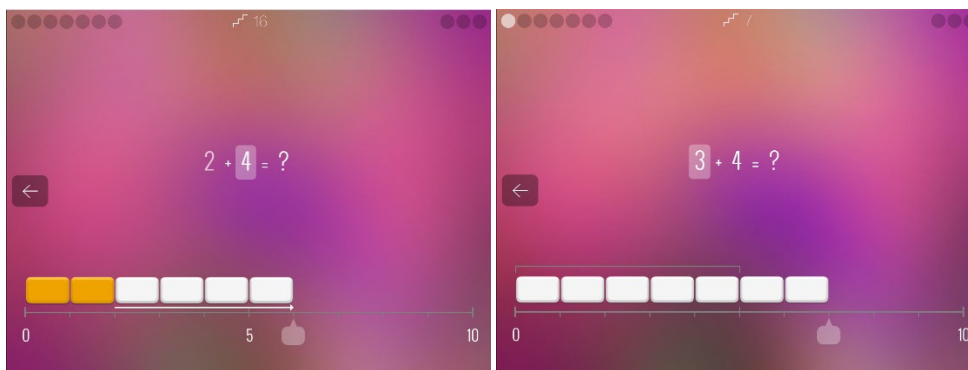


Figur 5. Exempel på när ett naturligt tal inom talområdet 0-10, respektive 0-20, ska representeras, Number Line i appen Vektor.

För alla övningsmoment så gäller att det tal eller den/de operationer som ska representeras med hjälp av tallinjen är centrerat ovanför tallinjen (t.ex. figur 6). De naturliga talen är representerade med siffersymboler från första början, medan rationella tal i bråkform till en början är representerade med liggande staplar och därefter stående staplar, där det rationella talet representeras som en del av en helhet, för att senare representeras med siffersymboler (figur 9). När övningsmomenten övergår till operationer med tal i bråkform så återkommer liggande och stående staplar som representationerna av de ingående termerna. Vidare är det tal som ska markeras på tallinjen markerat med en skuggad ruta (ses i alla figurer).

För alla övningsmoment så gäller också att tal på tallinjen representeras med siffersymboler, både för de naturliga talen och de rationella talen. För talområdet 0-10 markeras från början alla heltalen 0-10 med siffersymboler vid respektive intervallmarkering på tallinjen (figur 5), därefter används

siffersymboler enbart vid intervallmarkeringarna för talen 0, 5 och 10 och slutligen är enbart 0 och 10 markerade med siffersymboler (figur 6 och 7). För talområdet 0-20 markeras från början talen 0, 5, 10, 15 och 20 med siffersymboler vid respektive intervallmarkering (figur 5) och senare talen 0, 10 och 20 (figur 8). För de rationella talen så markeras varje bråkdel med siffersymboler på tallinjen, även tomma mängden anges som 0 delar av helheten (figur 9).



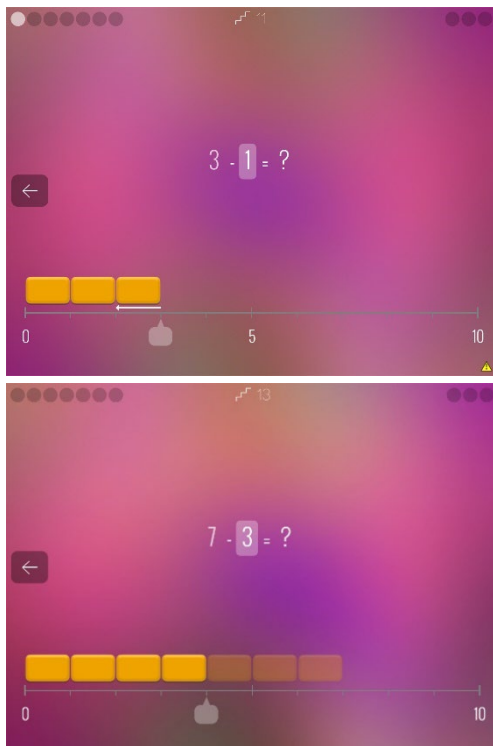
Figur 6. Exempel på när addition inom talområdet 0-10 ska representeras, Number Line i appen Vektor.

I början av ett övningsmoment markeras talet som ska representeras på tallinjen som ett intervall i form av en pil med start vid noll (figur 5 och 9). Denna "hjälp"-pil försvinner efter första träningsomgången i respektive moment. Det vill säga när momentet övergår från att öva representation av ensamma tal till att öva representation av operationer så återkommer pilen, för att sedan försvinna efter första träningsomgången för detta moment. För att representera aktuellt tal måste man dra den skuggade markören nedanför tallinjen längs med tallinjen för att något ska hända. Det går till exempel inte att markera talet direkt på tallinjen utan att "dra med sig" markören. När markören flyttas längs tallinjen markeras varje intervall med vita avgränsade block (figur 6). För momenten som avser representation av ensamma tal så försvinner de vita blocken när man "släpper" markören vid rätt position på tallinjen och ett nytt tal som ska representeras kommer fram centrerat ovanför tallinjen. För moment

som avser operationer av tal så förändras färgen på blocken från vita till gula när markören "släpps" vid rätt position för den/de första ingående termerna (figur 6). Om man släpper markören vid fel position blir blocken röda. Ovanför de vita blocken, under tiden markören flyttas längs med tallinjen, så markeras grupper om fem block med extra markering (figur 5 och 6), detta gäller oavsett om det är ensamma naturliga tal eller operationer med naturliga tal som ska representeras. För talområdet 0-20 ändras markeringen så småningom till grupper om 10. Gruppmarkeringen försvinner då markören släpps.

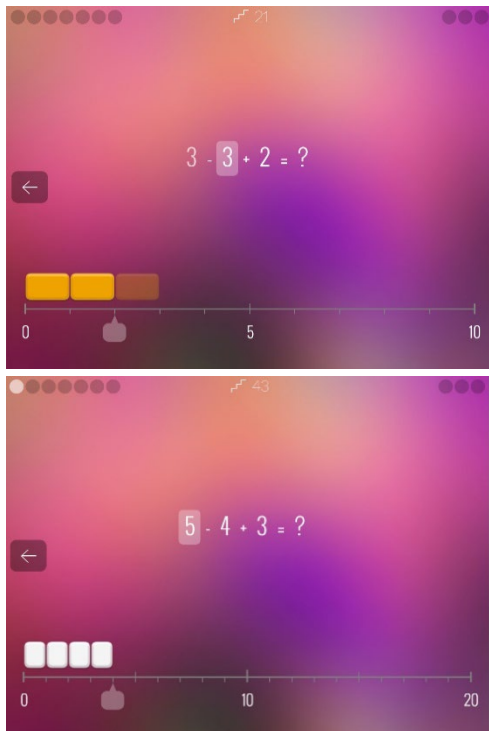
Vid representation av operationer används alltid ett frågetecken för den summa eller differens som operationen resulterar i (figur 6, 7 och 8). Vidare så markeras termerna som ingår i operationen som ska representeras från vänster till höger, så att det först är den vänstra termen som ska markeras som ett intervall på tallinjen, vilket synliggörs med den skuggade rutan, och därefter efterkommande termer i tur och ordning.

För addition med två termer så kan man välja hur representationen på tallinjen görs. Antingen så markeras första termen som ett intervall från noll (och blocken blir gula), därefter försvinner den skuggade rutan från den första termen och markerar nu den andra termen och markören flyttas längs tallinjen den sträcka som motsvarar det intervall som representerar andra termen, vilket även markeras med vita block ovanför tallinjen. När markören släpps vid rätt position så försvinner alla block (både gula och vita). Eller så kan man börja med att representera andra termen i additionen som ett intervall och när markören släpps vid rätt position så blir de vita blocken gula, den skuggade rutan är fortfarande kvar runt den första termen och markören kan fortsätta flyttas det intervall som representerar den andra termen. Som tidigare så markeras intervallet succesivt med vita block, vilka försvinner när markören släpps på rätt position på tallinjen. Ett tredje alternativ för addition med två termer är att direkt representera summan som ett intervall på tallinjen (figur 6). På samma sätt som innan så försvinner de vita blocken när markören släpps vid rätt position på tallinjen, i detta fall positionen för summan.



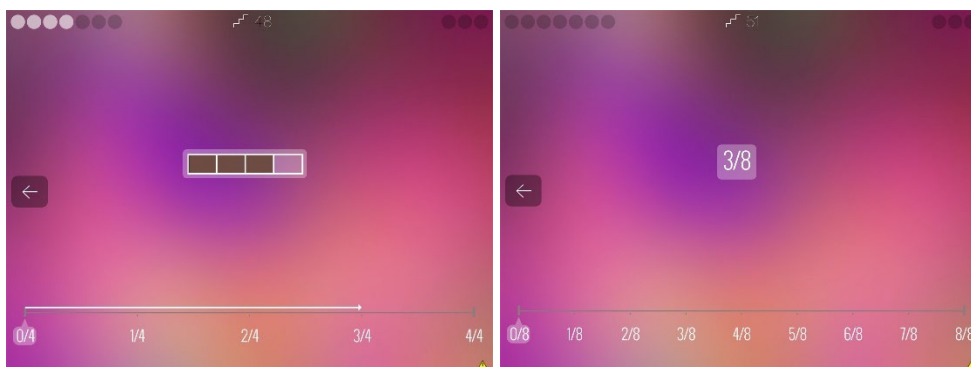
Figur 7. Exempel på när subtraktion inom talområdet 0-10 ska representeras, Number Line i appen Vektor.

För subtraktion kan man inte välja i vilken ordning termerna representeras på tallinjen. I dessa övningsmoment måste man alltid börja med den vänstra termen för att sedan fortsätta med efterföljande term, om man väljer att representera operationen genom ingående termer (figur 7). Subtraktion illustreras som en minskning genom att pilen i de första övningsomgångar pekar åt vänster på tallinjen. Detta visar att markören ska dras åt vänster och när detta görs blir blocken som markerar intervallet ovanför tallinjen mörkare i färgen (figur 6). När markören släpps på rätt position försvinner alla block, som i tidigare övningar, och en ny subtraktion som ska representeras centreras ovanför tallinjen. Precis som för addition kan man även välja att representera differensen av subtraktionen direkt på tallinjen.



Figur 8. Exempel på när en kombination av addition och subtraktion av tre naturliga tal inom talområdet 0-10, respektive 0-20, ska representeras, Number Line i appen Vektor.

För operationer med tre termer så kan man, precis som i övningsmomentet subtraktion, välja att antingen börja med att representera första termen som ett intervall på tallinjen och därefter efterföljande termer, eller att direkt markera resultatet av de två operationerna på tallinjen (figur 8, höger). Man kan även välja att först representera den första termen och därefter dra markören till resultatet av de två operationerna, det vill säga att representera summan eller differensen av de kommande två termerna med hänsyn till tecken som ett intervall (figur 8, vänster).



Figur 9. Två olika exempel på när ett rationellt tal i bråkform ska representeras, Number Line i appen Vektor.

Det utökade talområdet startar med övningar där först enskilda tal i bråkform ska representeras på tallinjen (figur 9) (vilket även beskrivs ovan). Därefter kommer övningar där representation av operationerna addition och subtraktion av tal i bråkform är i fokus. Här slutade våra utforskande analyser, så vi har inga resultat av den fortsatta progressionen.

Resultat: Lärares användning av appen

De två lärarna, som vi givit fingerade namn, har olika lång erfarenhet av att använda Vektor och använder appen på olika sätt. Gisela, som är grundskollärare, har använt Vektor i 4 år och Frida, som är förskollärare och jobbar i förskoleklass, i drygt två år. Båda lärarna genomför de fyrtio träningstillfällen som skaparna av appen förordar. Gisela arbetar med Vektor 30 minuter, 1-3 gånger/vecka och Frida 30 minuter 4 gånger/veckan. Gisela beskriver att hon fortsätter att använda Vektor nästkommande läsår för sina elever och hänvisar till tidigare goda erfarenheter med andra arbetsminnesprogram. Vektor fortsätter att användas upp på mellanstadiet på hennes skola. Hon modifierar då arbetet med Vektor något och använder inte appen lika frekvent som under det första läsåret.

Frida beskriver hur användningen av Vektor förläggs under vårterminen då hon lärt känna gruppen mer vilket hon ser som gynnsamt för att arbetet med Vektor ska fungera bra. Arbetet med Vektor utgör all matematikundervisning under den perioden. I Giselas undervisning utgör

Vektorarbetet ett separat spår i undervisningen och övrig matematikundervisning kopplas inte till detta arbete. Medan Gisela genomför arbetet med Vektor i halvklass sker arbetet med Vektor i Fridas klass i helklass. En annan skillnad i användning är att Frida har en gemensam inledning med genomgång och samtal om vad arbetspasset kommer att innehålla, där eleverna bland annat tipsar varandra om hur övningar kan lösas, medan Gisela inte har det.

Lärarna tillfrågades om fördelar och nackdelar med användningen av Vektor. Gisela ser många olika **fördelar** med Vektor. Vektor individualiserar elevernas arbete, ger bra resultat och bidrar till att hon som lärare hittar de elever som riskerar att hamna i matematiksvårigheter. Programmet är enkelt, eleverna klarar mycket av arbetet själva och kräver inte läskunnighet. Resultaten användas som underlag i dialog med vårdnadshavare och dessutom är appen gratis. Gisela lyfter fram att Vektor utgör en fördel i arbetet med exempelvis tiokamrater och att hon därför efter införandet av Vektorarbete kan lägga mer tid att arbeta med likhetstecknet, mönster och problemlösning. "Det är både för och nackdelar med Vektor. Det är inte så att vektor gör något själv, utan det behövs annat arbete också. Men Vektor är bra på flera sätt faktiskt", säger Frida. Hon beskriver att eleverna tränas i att bli uthålliga och att appen ger nötning av olika matematikinnehåll. Detta beskriver även Gisela, att appen ger eleverna färdighetsträning.

De **nackdelar** som båda lärarna lyfter fram är att eleverna blir mycket trötta efter arbetet med Vektor och att detta påverkar resten av dagens planering. De lyfter även tekniska problem, att programmet fryser eller att ljudet inte fungerar samt svårigheter i att få tillgång till tillräckligt med iPads. Båda lärarna ser även en nackdel i form av litet lärarstöd och efterfrågar en lärarhandledning, vilket vi kommer tillbaka till senare. Gisela beskriver att hon ser en nackdel i att inte innehållet i Vektor läses upp och ser framför allt hur det skulle kunna utgöra ett stöd för elever i svårigheter. Gisela lyfter också att progressionen är väl snabb vilket kan bidra till att eleverna upplever innehållet som för svårt och då tappar motivationen. Detta håller Frida med om, hon beskriver att eleverna inte alltid förstår det matematikinnehåll som Vektor tränar och tar bråkräkning som ett exempel.

I Vektor adderar eleverna tal i bråkform, men detta är ett innehåll som eleverna inte behärskar i andra sammanhang som exempelvis om klassen delar frukt och i en sådan situation adderar bråk.

Övningen **Talkompisar (Number Pals)** beskriver Gisela som att den utgår från ett "Cuisenairetänk" där talen ses i visuella block snarare än som tal. Hon ställer sig tveksam till om eleverna upptäcker att talen är uppdelade i delar om fem (t.ex. att talet 15 visas genom tre staplar om vardera 5). Hon beskriver också att eleverna i denna övning lätt kan se hur mycket av övningen som återstår i och med att stapeln med talkompisar byggs på allt eftersom. Frida beskriver att eleverna i denna övning fortsätter utmanas med att arbeta med högre tal, medan undervisningen i förskoleklass annars förmodligen hade stannat vid talet 10.

Tallinjen (Number Line) beskriver båda lärarna som en bra övning men lyfter även sådant som kan utvecklas eller kan ses som brister med övningen. Frida ser det som negativt att svaren inte visas och Gisela har erfarenhet av att övningen kan vara utmanande för elever med motoriska svårigheter, då talen ska visas genom att dras över iPads-kärmen. Gisela funderar över om övningen ger mekanisk träning för eleverna när de kommer upp till addition med decimaltal, men menar att detta kanske ändå ger förförståelse i senare årskurser.

Båda lärarna beskriver att deras roll under arbetspassen med Vektor innebär att stötta eleverna gällande uthållighet och koncentration. Båda lärarna uttrycker att eleverna behöver "pushas" och stöttas i arbetet med Vektor. Det är utmanande för eleverna att genomföra 40 arbetspass och att hålla aktivitetsnivån genom alla arbetspass. Frida ser en skillnad i hur stor grad som elever "pushas" i arbetet med Vektor i jämförelse med arbete med andra övningar "I andra övningar slutar man när de är på topp, man driver dem inte vidare som i Vektor." Frida beskriver också hur hon pratar med eleverna om koncentration och att hon använder motiveringsschema och filmer från appens hemsida för att motivera eleverna. Gällande elever som har låg uthållighet ställer sig Gisela frågan om det är värt att eleverna arbetar med Vektor, eller om det kan vara bättre för dem att arbeta med annan färdighetsträning.

I Vektor finns **dokumentation** över elevernas arbete. Där kan lärarna se elevernas aktivitetsgrad. Här har lärarna olika åsikter. Gisela menar att dokumentationen ger en bra överblick över om eleverna fastnar på något och om de når "en plåtå" i sitt lärande, medan Frida ifrågasätter Vektors dokumentation av antal rätta svar och aktivitet och menar att det är relativt i och med att det beror på vilken svårighetsgrad och arbets sätt som eleven använt sig av. Om en elev exempelvis räknar på fingrarna så är det en aktivitet som Vektor inte kan mäta. Båda lärarna beskriver också att det är svårt att tolka all information i dokumentationen, bland annat diagrammens y-axlar, och efterfrågar stöd i hur diagrammen ska tolkas.

Båda lärarna uttrycker en önskan om en **lärarhandledning** till Vektor, utöver den information som finns på Vektors hemsida. De efterfrågar en överblick av alla Vektors övningar och arbetsgång och arbetsmaterial för utskrift. Gisela önskar stöd i form av olika arbetsmaterial, extrauppgifter, spel men även för planering av undervisning. Frida har skapat en egen lärarhandledning till Vektor genom att dokumentera alla övningar genom fotografier. På så sätt kan eleverna förberedas inför nya övningar utanför arbetet med Vektor-appen. Eftersom övningarna inte har några namn så har Frida döpt dem för att kunna samtala med eleverna om dem. Båda lärarna uttrycker att de skulle vilja kunna välja matematikinnehåll och plocka bort vissa övningar i Vektor. Gisela efterfrågar fler matematikområden som behöver mycket färdighetsträning såsom multiplikation, division och klockan. Vi pratar även om lärarnas inställning till lärarhandledningar generellt. Både Gisela och Frida är positiva till lärarhandledningar i matematik och vill kunna hitta förslag på bra övningar i dem, bland annat gruppuppgifter, men även annat stöd och tips som kan användas och anpassas efter gruppens behov. Frida beskriver att en bra lärarhandledning har "syfte, tips, kopieringsunderlag och utgår från läroplanen".

Arbetet med Vektor beskrivs på hemsidan som något som läraren lätt introducerar och som sedan är relativt självgående, där lärarens roll är att peppa och motivera eleverna. Men Frida beskriver att innehållet behöver introduceras av henne. Vektor-appens didaktisk design bygger på att läraren hjälper eleverna igång med appen och sedan peppar dem att kämpa

på. Läraren ges ingen roll att vara delaktig i det innehåll som Vektor tränar. Detta gör lärarna vi intervjuat motstånd mot, på lite olika sätt och anpassar användningen. Frida inleder den individuella vektoranvändningen med helklassundervisning, förbereder eleverna för nya övningar och möjliggör för eleverna att då tipsa varandra. Gisela har utvecklat ett arbetssätt vad gäller omfattningen av Vektoranvändningen och använder Vektor år efter år, vilket inte är Vektors riktlinjer. Eftersom Gisela använt sig av Vektor under förhållandevis lång tid kan hon se såväl positiva som negativa förändringar i hur appen utvecklats under den tiden. Något hon tycker försämrats är att det inte längre finns möjlighet att själv bestämma tid för varje träningstillfälle. Något som förbättrats är att det numera är möjligt att flytta över elevkonton från årskurs till årskurs vilket besparar tid då eleverna använder sitt användarkonto under flera års tid. Båda lärarna efterfrågar lärarhandledning och stöd att tolka statistiken.

Slutsatser

Detta projekt har fokuserat på appen Vektor, genom analyser av appens egenskaper och samtal med lärare om deras erfarenheter och reflektioner kring appen. Projektet har primärt avgränsats till de övningar i appen som behandlar tallinjen och taluppfattning, för att utreda hur appen kan användas som stöd för elevers lärande och som stöd för lärares arbete med planering och utveckling av undervisningen.

Analyserna av appen påvisar **möjligheter till att använda denna som stöd för elevers lärande kring tallinjen och taluppfattning**, till exempel avseende adaptiv mängdträning och att möjligheter ges till att uppfatta och hantera tal genom olika uttrycksformer. Samtalen med lärare stärker detta, speciellt avseende färdighetsträning och mängdträning, men lärarna har också upplevt vissa potentiella brister i appen, såsom alltför snabb progression samt att de önskar vissa tillägg som kunde förbättra förutsättningarna för elevers lärande. Till exempel skulle appen på ett tydligare sätt kunna visa uppdelning av tal i staplar i övningen Talkompisar (såsom att 15 utgörs av tre staplar om vardera 5) och appen skulle kunna visa svaren i beräkningar i övningen Tallinjen.

Analyserna av appen påvisar också **möjligheter att använda denna som stöd för lärares arbete med planering och utveckling av undervisning kring tallinjen och taluppfattning**, till exempel genom att de båda övningarna har potential att både ersätta och komplettera och förstärka annan undervisning om taluppfattning. Samtalen med lärare stärker detta, såsom att appen används för att ta hand om övningar kring tiokompisar så att mer tid i undervisning kan fokusera på till exempel likhetstecknet och problemlösning. Lärarna har dock upplevt olika behov att anpassa användningen av appen, jämfört med hur den är tänkt att användas enligt appens tillverkare. Detta handlar till exempel om att arbeta med appen i den omfattning som förordas av tillverkarna. Dessutom upplevs vissa oklarheter i den dokumentation som appen genererar över elevernas arbete, avseende hur denna information kan tolkas och användas. Mer generellt önskar lärarna någon sorts lärarhandledning till appen för att den på bättre sätt ska kunna utgöra ett stöd i planering av undervisningen.

Som helhet kan sägas att vi noterat flera möjligheter till att använda appen i matematikundervisningen men att det också finns **vissa spänningar mellan appens egenskaper och lärares behov**. Detta leder till att lärarna inte använder appen utifrån instruktionerna som anges av appens tillverkare, utan de gör visst motstånd och anpassar användningen. En del i detta är att lärarna upplever att det inte alltid fungerar i praktiken att använda appen såsom tillverkarna beskrivit. Då blir det också osäkert om de positiva effekter som framkommit i forskning kan bibehållas. En annan del i detta är att appen är skapad för att elever ska kunna jobba med den självständigt, och lärare upplever vissa fördelar med detta, men de efterfrågar också mer insyn i appens övningar samt mer stöd i hur appen kan användas, för att kunna använda den på mer aktiva och integrerade sätt i sin undervisning. Detta tolkar vi som att lärare vill ha kontroll över innehållet i sin undervisning och inte överlämna det till ett läromedel.

Som en fortsättning och fördjupning på detta projekt kommer ett större projekt att genomföras i samarbete med Örnsköldsviks kommun under 2021–2024. Syftet med det projektet är att klargöra hur utformning av läromedel, avseende samspel mellan olika teckensystem, såsom språk, symboler, bilder och animeringar, kan stötta elevers lärande av

matematiska begrepp. Både analoga och digitala läromedel kommer att analyseras. Projektet inkluderar ett mer ingående samarbete med lärare för att tillsammans skapa ett konkret verktyg som kan utgöra ett stöd för lärare att använda när läromedel granskas, väljs eller skapas, och används. Detta verktyg kommer att testas och utvecklas i undervisningssituationer.

Referenser

Callaghan, M.N. & Reich, S.M. (2018). Are educational preschool apps designed to teach? An analysis of the app market. *Learning, Media and Technology*, 43(3), 280-293. <https://doi.org/10.1080/17439884.2018.1498355>

Cayton-Hodges, G.A., Feng, G., & Pan, X. (2015). Tablet-Based Math Assessment: What Can We Learn from Math Apps? *Educational Technology & Society*, 18(2), 3-20.

<https://www.jstor.org/stable/10.2307/jeductechsoci.18.2.3>

Elofsson, J. (2017). *Children's early mathematics learning and development : Number game interventions and number line estimations*. Doktorsavhandling, Linköpings universitet. <https://doi.org/10.3384/diss.diva-137477>

Handal, B., Campbell, C., Cavanagh, M., & Petocz, P. (2016). Characterising the perceived value of mathematics educational apps in preservice teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 28, 199–221.

<https://doi.org/10.1007/s13394-015-0160-0>

Harrison, T.R. & Lee, H.S. (2018). iPads in the mathematics classroom: Developing criteria for selecting appropriate learning apps. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 6(2), 155-172.

<https://doi.org/10.18404/ijemst.408939>

Hawkins, R.O., Collins, T., Hernan, C., & Flowers, E. (2017). Using Computer-Assisted Instruction to Build Math Fact Fluency: An Implementation Guide. *Intervention in School and Clinic*, 52(3) 141–147.

<https://doi.org/10.1177/1053451216644827>

Kilhamn, C. (2011). *Making Sense of Negative Numbers*. Doktorsavhandling, Göteborgs universitet. <http://hdl.handle.net/2077/24151>

Käser, T., Baschera, G.-M., Kohn, J., Kucian, K., Richtmann, V., Grond, U., Gross, M., & von Aster, M. (2013). Design and evaluation of the computer-based training program *Calcularis* for enhancing numerical cognition. *Frontiers in Psychology*, 4, 489. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00489>

Nemmi, F. Helander, E., Helenius, O., Almeida, R., Hassler, M., Räsänen, P., & Klingberg, T. (2016). Behavior and neuroimaging at baseline predict individual response to combined mathematical and working memory training in children. *Developmental Cognitive Neuroscience*, 20, 43-51. <https://doi.org/10.1016/j.dcn.2016.06.004>

Bilaga 1: Egenskaper hos appar

Källa	Övergripande kategori	Aspekt
Callaghan & Reich (2018)	Simplicity of content and clarity of goals	Learning goals
		Types of prompts
		Modeling goals
		In-play guidance
	Quality of feedback and Rewards	Types of feedback
		Consistency of guidance
		Reward systems
	Structure of Challenge	Leveling
		Scaffolded challenge
	Mobile App-Based Interactions	Touchscreen interactions
Mobile-device capabilities		
Cayton-Hodges et al. (2015)	Mathematical content	Mathematical accuracy
		Mathematical richness
	Feedback and scaffolding	Relevant and timely feedback
		Scaffolding
		Opportunities for reflection

	Richness of interactions	Modes of interactions
		Item types
	Scoring and adaptability	Scoring
		Adaptability
Handal et al. (2016)	Section 1: explorative apps (task structure)	closely mirrors a model or real-life situation
		enter own data and observe changes in the model
		exploration within learning discovery framework
		goal-oriented tasks driving student interest and curiosity
		ambiguity and uncertainty fostering personal investigation
	Section 2: productivity apps (task structure)	creatively come up with own design and/or concept
		linking symbolic, numerical and graphical data
		creating own content/understandings
		using a variety of different tools
		intuitive and easy to use
	Section 3: instructive apps (task structure)	variety of different activities/exercises
		appropriate feedback
		cater for a range of student ability levels
		meaningful, fostering engagement and rich problem solving
		grading and summary data is provided
	Cognitive involvement	retrieve and review maths concepts/skills/procedures (remembering)
		demonstrate understanding of maths concepts/skills/procedures
		apply their knowledge in practical contexts
		critically analyse maths content in text, graphs and/or animations (analysing)
		appraise and justify maths ideas or products (evaluating)
construct new and meaningful maths ideas or products (creating)		
General pedagogical issues	pose own problems	
	sequentially designed degrees of difficulty	
	control over own learning	
	appealing and motivating according to the age group	
	meaningful teaching and learning guidelines	
	integrates maths with content from other key learning areas	

		collect and record their own data
		reading level appropriate to the students
		saves and keeps students' work
		opportunities for collaboration
	Operational issues	intuitive and user-friendly navigation
		helpful technical instructions
		alter settings to customise the app to needs
		file sharing, streaming of content and/or online communications
		flexible; permitting students to move in different directions
		supporting Web page providing additional useful information
		easily works with a range of media (audio, video, image, text, animations)
		interface with social media tools
		uncluttered display; visually stimulating
		leave at any time and begin where left off
Harrison & Lee (2018)	Interactions	Meaningfully interactive
		Natural actions on objects
		Visible consequences of actions
		Range of actions not limited by technology
		Necessitate thoughtful, deliberate actions
		Cognitively faithful interactions
	Quality of Content	Mathematically faithful
		Cognitively demanding
		High-quality presentation
	Feedback and Support	Provides relevant and timely feedback
		Provides scaffolding
		Provides opportunities for reflection
	Usability	Easy to use
		Documentation is clear and easy to understand
		Interface is clear, consistent, and follows technology standards
		Usable by a variety of learners
	Selecting a Program	Opportunities to Respond

Hawkins et al. (2017)		Immediate Feedback
		Instructional Pacing
		Engagement
		Progress Reports
	Implementation Plan	Hardware
		Resources; money and time
		Student Training
		Progress Monitoring

Bilaga 2: Aspekter av tallinjen eller taluppfattning

Övergripande kategori	Aspekt
Mental tallinje	Storleksrepresentation av tal
	Visuell-linjär representation
	Förhållande positiva och negativa tal (samma tallinje)
	Tal som position, rörelse eller avstånd
Kognitiva system	Uppfatta skillnader i antal utan att räkna (ANS)
	Uppfatta skillnader i antal (1-4) utifrån exakt antal (OTS)
Taluppfattning	Icke-symboliskt (konkret representation)
	Verbalt (ord)
	Symboler (siffror)
	Integration av de föregående
Fysisk tallinje	Ange position av givet tal eller vilket tal som markeras
	Didaktiskt verktyg för annat, såsom addition eller subtraktion