# Algebrasvårigheter ur elev- och lärar-perspektiv:
# Om hinder i lärandesituationer och utmaningar i undervisningssituationer

**Birgit Gustafsson**

Huvudhandledare: Magnus Österholm
Biträdande handledare: Frode Rønning

Fakulteten för humanvetenskap
Doktorsavhandling i Ämnesdidaktik
Mittuniversitetet
Sundsvall, 20191011

Akademisk avhandling som med tillstånd av Mittuniversitetet i Sundsvall framläggs till offentlig granskning för avläggande av filosofie doktorsexamen,
20191011, 10.00, E409, Mittuniversitetet, Sundsvall.
Seminariet kommer att hållas på svenska.

**Algebrasvårigheter ur elev- och lärarperspektiv: Om hinder i lärandesituationer och utmaningar i undervisningssituationer**

© Birgit Gustafsson, 2019
Tryck: Mittuniversitetet, Sundsvall
Omslagsbild: Maja Gustafsson
ISSN: 1652-893X
ISBN: 978-91-88947-14-7

Fakulteten för humanvetenskap
Mittuniversitetet, 851 70
Telefon: +46 (0)10 142 80 00
Mittuniversitetet doktorsavhandling 303

*Till Evelina, Sarah, Maja och Mauritz*

# Innehållsförteckning

**Sammanfattning** ..... **ix**

**Lista över artiklarna** ..... **xi**

**Förord** ..... **xiii**

**1 Introduktion** ..... **1**

1.1 Syfte och frågeställningar ..... 1

1.2 Delstudierna ..... 2

1.3 Avhandlingens disposition ..... 3

**2 Algebra** ..... **5**

2.1 Algebrasvårigheter ..... 7

2.1.1 Bokstavssymboler i algebra ..... 7

2.1.2 Process – objekt dualitet ..... 8

2.1.3 Likhetstecknets betydelse ..... 8

2.1.4 Procedurer för ekvationslösning ..... 9

2.1.5 Algebraisk problemlösning ..... 9

2.2 Elevperspektiv på algebrasvårigheter ..... 11

2.2.1 Algebrasvårigheter i tidigare forskning ..... 11

2.2.2 Modellering i elevers problemlösning ..... 15

2.2.3 Transformationer i elevers problemlösning ..... 17

2.3 Lärarperspektiv på algebrasvårigheter ..... 20

2.3.1 Undervisning och algebrasvårigheter i tidigare forskning ..... 21

2.3.2 Frågor i lärares undervisning ..... 23

2.3.3 Bedömning av elevlösningar ..... 26

**3. Metod** ..... **29**

3.1 Deltagare ..... 29

3.2 Insamling av data ..... 30

3.3 Analyser ..... 31

3.3.1 Analys i delstudie 1 och 2 – Gymnasieelever och högstadieelever diskuterar problemlösningsuppgifter ..... 31

3.3.2 Analys i delstudie 3 – Lärares frågor i relation till algebrasvårigheter 34

3.3.3 Analys i delstudie 4 – Lärarstudenter diskuterar och bedömer algebrasvårigheter ... 35
3.4 Etiska överväganden ... 37
3.4.1 Forskaretik ... 38
**4. Resultat ... 39**
4.1 Elevperspektiv på algebrasvårigheter ... 39
4.1.1 Transformationer i elevuppgifterna ... 39
4.1.2 Summering av resultaten från elevdiskussionerna ... 40
4.2 Lärarperspektiv på algebrasvårigheter ... 43
4.2.1 Lärares frågor i matematikklassrum ... 43
4.2.2 Exempel på lärares frågor under klassrumsgenomgångar ... 46
4.2.3 Bedömning av algebrasvårigheter ... 47
4.2.4 Exempel på lärarstudenternas gruppdiskussioner om bedömning av algebrasvårigheter ... 50
**5. Slutsatser och diskussion ... 52**
5.1 Hinder för elever i lärandesituationer ... 52
5.1.1 Transformationen mellan naturligt språk och algebraisk representation ... 53
5.1.2 Transformationen inom algebraisk representation ... 53
5.1.3 Transformationen mellan algebraisk representation och naturligt språk ... 54
5.1.4 Summering av hinder för elever i lärandesituationer ... 54
5.2 Orsaker till att eleverna kommer förbi hinder i lärandesituationer ... 56
5.2.1 Transformationen mellan naturligt språk och algebraisk representation ... 56
5.2.2 Transformationen inom algebraisk representation ... 56
5.2.3 Transformationen mellan algebraisk representation och naturligt språk ... 57
5.2.4 Summering av orsakerna till att eleverna kommer förbi hinder i lärandesituationer ... 57
5.3 Utmaningar för lärare i undervisningssituationer ... 58
5.3.1 Lärares frågor i relation till algebrasvårigheter ... 58

5.3.2 Bedömning av algebrasvårigheter ..... 59
5.3.3 Summering av utmaningar för lärare i undervisningssituationer ..... 60
5.4 Sammanfattande diskussion om algebrasvårigheter ur både elev- och lärarperspektiv och didaktiska implikationer ..... 61
5.5 Fortsatt forskning ..... 62
**6. Summary in English ..... 63**
6.1 Introduction, purpose, and issues ..... 63
6.2 Algebra ..... 64
6.2.1 Algebra difficulties ..... 65
6.2.2 Theory to investigate student perspective on algebra difficulties ..... 66
6.2.3 Theory to investigate teachers' perspective on algebra difficulties ..... 68
6.3 Method ..... 69
6.3.1 Method in sub-study 1 ..... 70
6.3.2 Method in sub-study 2 ..... 70
6.3.3 Method in sub-study 3 ..... 70
6.3.4 Method in sub-study 4 ..... 70
6.4 Results ..... 71
6.4.1 Student perspective on algebra difficulties - Transformations in students' solutions ..... 71
6.4.2 Teachers' perspectives on algebra difficulties – Teachers' questioning and student teachers' scoring ..... 72
6.5 Discussion ..... 73
6.5.1 Student perspectives on algebra difficulties ..... 73
6.5.2 Teachers' perspectives on algebra difficulties ..... 74
6.5.3 Algebra difficulties regarding students' and teachers' perspectives ..... 76
**7. Referenser ..... 77**
**Bilaga ..... 88**

# Sammanfattning

Syftet med denna avhandling är att fördjupa förståelsen för algebrasvårigheter sett ur elevperspektiv och lärarperspektiv. För att studera detta har tre övergripande frågeställningar formulerats;

- Vilka hinder för eleverna kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas i lärandesituationer?

- Hur kan dessa hinder för eleverna överkommas?

- Vilka utmaningar för lärarna kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas i undervisningssituationer?

Fyra delstudier har genomförts och skapat underlag för att besvara dessa frågor.

För att undersöka hinder för elever i lärandesituationer fick 37 elevgrupper diskutera några problemlösningsuppgifter i delstudie 1 och 2. Diskussionerna analyserades med avseende på övergångar mellan olika representationsformer i uppgifterna.

I analyserna av övergångarna mellan olika representationsformer kunde flera hinder observeras. Bland annat tolkar eleverna variabler som enheter och har stora problem med det osynliga multiplikationstecknet i uttryck som t.ex. $5x$. Eleverna kommer förbi dessa hinder genom att de diskuterar uppgiften med varandra. De ställer undersökande frågor till varandra och överför bland annat den algebraiska symbolskriften till naturligt språk vilket leder dem förbi dessa hinder. Läraren har dock en avgörande roll för att de ska kunna passera dessa hinder.

För att undersöka utmaningar för lärare i undervisningssituationer analyserades lärares frågor i helklassgenomgångar med avseende på algebrasvårigheter i delstudie 3 och i delstudie 4 analyserades hur sex grupper av lärarstudenter diskuterade och bedömde algebrasvårigheter i fem elevlösningar.

Resultatet visar att lärarna ställer mest slutna frågor på lägre nivå i relation till de flesta algebrasvårigheter. Däremot var ca hälften av frågorna öppna då algebrasvårigheten kring *algebraisk problemlösning* behandlades.

Resultatet om bedömning av algebrasvårigheter visar att lärarstudenterna inte diskuterade algebrasvårigheterna i uppgiften i någon större utsträckning.

Som helhet visar mina studier att ur elevperspektiv så möter eleverna hinder då de löser algebraiska problemlösningsuppgifter. Både högstadie- och gymnasieelever har problem att förstå betydelsen av variabler och det osyn-

liga multiplikationstecknet i t.ex. $5x$. Ur lärarperspektiv så visar studierna att lärarna ställer olika typer av frågor beroende på vilken algebrasvårighet som behandlas. I bedömningssituationer diskuteras algebrasvårigheterna endast till en liten del. I avhandlingen diskuteras olika möjliga orsaker till resultatet samt ges didaktiska implikationer om vad som behöver prioriteras i undervisningen

Nyckelord: Algebrasvårigheter, Transformationer, Lärares frågor, Elevperspektiv, Lärarperspektiv

# Lista över artiklarna

*Artikel 1*

Gustafsson, B. (2016). Swedish students in upper secondary school solving algebraic tasks – What obstacles can be observed? *Proceedings of MADIF 10, The Tenth Mathematics Education Research Seminar*, Karlstad, January 26-27, 2016. Linköping: SMDF (Svensk förening för matematikdidaktisk forskning), s. 27–36.

*Artikel 2*

Gustafsson, B. (2019) How secondary school students make meaning of algebraic signs. Submitted 2019

*Artikel 3*

Gustafsson, B. (2019). Teachers questioning in relation to algebra challenges in secondary school: What may characterise these questions? Submitted 2019.

*Artikel 4*

Gustafsson, B. (2019). The role of a general analytic rubric in the scoring process: Student teachers' use of a general analytic rubric when scoring pupils' mathematics problem-solving solutions. Submitted to International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2019.

# Förord

Då var det dags att sätta punkt. Någon gång måste det ske men när har varit en fråga och det är både med förtjusning och lite skräck jag gör det nu. Skräck för vad? Jo för att lämna den trygghet det innebär att alltid ha handledare att diskutera med och som kan leda när man kommer in i grubblerier. Många anser, att det är att bli klar som är målet men så är det inte för mig. Jag citerar Karin Boje ”… det är resan som är mödan värd”. Den här resan har tagit lång tid men nog har det varit värt det. Jag har lärt mig så mycket om, forskning, matematik, undervisning, lärande, teorier, andra människor och inte minst massor om mig själv. Det har varit en resa i omvärlden där jag fått träffa människor från andra länder och kulturer, en resa till olika platser och universitet i Sverige. På alla dessa platser har jag mött fantastiska människor som jag har fått lära känna mer eller mindre men det har även varit en inre resa. Allt detta har gjort mig rikare och jag har fått erfarenheter som jag inte vill vara utan. Det har inte alltid varit en lätt resa men även de svåra stunderna har gjort mig till en rikare människa, rikare på erfarenheter som jag bär med mig och dessa återspeglar sig i mig både professionellt och som person. Jag tror faktiskt att denna resa har medfört att jag blivit lite klokare. Så nu vill jag tacka alla er som på olika sätt varit delaktiga i min resa. Några kommer jag nämna vid namn men om du inte är omnämnd så beror det på platsbrist (min avhandling är också tvungen att rymmas i denna bok) men jag antar att om du nu håller denna avhandling i din hand så har du varit delaktig på något sätt så tack för det som du bidraget med på min resa.

Först vill jag rikta mitt tack till Magnus Österholm som varit min huvudhandledare de senaste tre åren. Jag är dig så tacksam för att alla berikande samtal och ditt tålamod. Du har lärt mig så mycket. Tack för att du hjälpt mig att få fram det viktiga i mitt skrivande. Det jag ville skriva om men som hade en tendens att försvinna för att jag ville greppa över så mycket.

Jag vill även rikta mitt tack till Frode Rønning, som varit min biträdande handledare. Tack för alla gånger du åkt över fjället för att handleda mig, eller föreläsa för svenska matematikdoktorander. Du har alltid ställt upp och kommit med många kloka synpunkter på mina studier.

Så vill jag också tacka mina första handledare Lisbeth Åberg-Bengtsson och Per Edström. Tack för alla samtal vi haft och det ni lärt mig. Ni ledde mig med varsamhet in i den akademiska världen, stöttade mig när det var tungt och hjälpte mig när jag drunknade i all min data.

Tack till KG Karlsson och Magnus Oskarsson för att ni alltid uppmuntrade och stöttade mig. Det har alltid känns som en trygghet att ha er i min närhet.

Jag vill också passa på att tacka Johan Lithner för att du väckte mitt intresse för matematikdidaktik vilket ledde mig fram till där jag står idag. Tack för alla intressanta och givande samtal.

Jag vill också tacka mina doktorandkollegor som antogs samtidigt som mig, Catarina Arvidsson, Peter Degerman, Anneli Hansson, Odour Olande, Anna-Karin Perselli, Maria Rasmusson och ni andra doktorandkollegor på Miun. Tack för att ni bidrog med era kloka tankar i kurser som vi gick eller när vi läste varandras arbeten. Tack Nina Eliasson och Anna-Karin Westman utan er gemenskap på avdelningen hade det inte varit detsamma. Ett stort tack också till avdelningen matematik och didaktik samt Matematikkollegiet. Det har varit så intressant att få vara en del av arbetet tillsammans med er. Tack också till Richard Österlund och Per Åhag för alla skratt och roliga samtal vi haft genom åren. Tack Magnus Neuman för att jag fick bo hos er när jag arbetade för länge på kvällarna så att sista bussen hem redan gått.

Tack till Kerstin Gustafsson som var den första som tog emot mig när jag kom som vilsen doktorand till Härnösand. Det var så skönt att finna en Öviksbo där. Tack för många fina samtal inte minst under alla buss- och biturer mellan Härnösand och Övik.

Jag vill även tacka er som var med i lärarutbildningsnämnden under de tre år som jag var doktorandrepresentant. Det var fantastiskt lärorikt att få ta del av allt era tankar och lärdomar och inte minst för alla samtal vid middagarna. Astrid Pettersson tack för din klokskap och för att du alltid fanns för att dryfta idéer och tankar med. Christina Segerholm, tack för att alla kloka råd och att du stöttande mig när jag kört fast.

Jag vill också tacka Cecilia Kilhamn för att du tog dig an mina texter vid 90%-seminariet. Dina tips och råd har hjälpt mig mycket i det avslutande arbetet med texterna. Tack även till alla doktorandkollegor i matematikdidaktik i Sverige. Det har varit intressant och roligt att få lära känna er genom de doktoranddagar vi haft eller genom kurser vi gått tillsammans. Några vill jag rikta ett speciellt tack till Olov Viirman, Erika Stadler, och Lena Aretorn. Det blev roligare tillsammans med er.

Jag vill också passa på att tacka mitt fantastiska arbetslag på Nolaskolan. Tack för att alla givande arbetsdagar jag får spendera med er och för att ni tålmodigt låtit mig få komma och gå som jag ville för att hinna skriva lite mellan lektioner och möten. Detta har fungerat tack vare min närmaste chef,

Robert Nordqvist. Tack för att du stöttat mig och gjort det möjligt för mig att hinna skriva bland annat tack vare ett bra schema.

Tack också mina fina studiekamrater från lärarutbildningen Maria Hedman, Anna Sakari och Linda Rundqvist. Tack för alla fantastiskt roliga och intressanta samtal med er under de år som gått, om matematik, lärande och livet i stort. Jag vill också tacka Nils Holmgren för alla intressanta samtal vi har haft genom åren.

Tack också ni lärare och elever som varit deltagare i mina studier. Utan er hade denna avhandling inte blivit av. Tack för att ni, lärare, ställde upp och tog emot mig i era klassrum. Tack till alla elever som kämpade och tålmodigt löste uppgifter tillsammans framför kameran.

Sist men inte minst vill jag tacka mina syskon med familjer och min egen lilla familj som outtröttligt stått ut med mig under denna långa tid. Ni har varit och är min källa till glädje. Mina flickor, Evelina, Sarah och Maja tack för att ni funnits med och uppmuntrat mig. Och Mauritz nu lovar jag att vi kan börja träna tillsammans.

# 1 Introduktion

Denna avhandling behandlar undervisning och lärande om algebra i grundskolans senare år och gymnasieskolans första år. Fokus för studien är att undersöka hur algebrasvårigheter behandlas i undervisningen och i lärandesituationer. I lärandesituationerna fokuserar jag på vilka hinder elever stöter på när de diskuterar algebraiska problemlösningsuppgifter och hur de kommer förbi dessa hinder. I undervisningssituationer fokuserar jag på de frågor lärare ställer i relation till specifika algebrasvårigheter och hur de specifika algebrasvårigheterna diskuteras och bedöms av lärarstudenter. Dessa två delar, lärande och undervisning kommer att bidra till kappans övergripande fokus, att undersöka algebrasvårigheter ur elev- och lärarperspektiv.

Det har länge debatterats att algebra är ett problematiskt område (t.ex. Kieran, 1992; Stacey & Chick, 2010) som eleverna inte mött i formell mening i de tidiga skolåren. Eleverna har mött algebra under tidigare skolår vilket vanligtvis benämns pre-algebra men det är först i högstadiet som de algebraiska begreppen introduceras i formell mening. Studier har visat att svårigheter i den tidiga inlärningen av algebra och funktioner kan orsaka problem i de senare matematikkurserna (Stacey & Chick, 2010). Det finns en risk att svårigheter uppstår när en mängd nya begrepp introduceras under en kort tid utan att man säkerställer en adekvat förståelse av begreppen. Dessutom skapar det specifika och entydiga matematiska språket ofta svårigheter för eleverna, speciellt då vissa av de matematiska begreppen används i vardagssammanhang men med en annan betydelse, t.ex. rötter, volym, teckna, etc. Svårigheterna beror även delvis på det matematiska språkets abstrakta karaktär som kan delas upp i tre kategorier; naturligt språk, symbolisk skrift och sammansatt representation (Drouhard & Teppo, 2010). Det naturliga språket består av meningar och fraser på t.ex. svenska. Symbolisk skrift består av tecken och uttryck. Sammansatt representation är ett system av tecken, ett semiotiskt system och innehåller både symbolisk skrift och grafer, tabeller etc. Trots mängder av forskning om algebra och dess problematik så finns det fortfarande behov att studera och fördjupa vår förståelse. Denna avhandlings bidrag är att medverka till en fördjupad förståelse för algebrasvårigheter sett utifrån både elevers och lärares perspektiv.

## 1.1 Syfte och frågeställningar

Denna avhandling har fokus på algebrasvårigheter och lärande men även på algebrasvårigheter och undervisning. Dessa två perspektiv kommer till-

sammans ge en djupare förståelse för algebrasvårigheter Det övergripande syftet med denna avhandling är därmed att fördjupa förståelsen för algebrasvårigheter sett ur elevperspektiv och lärarperspektiv. För att studera detta har tre övergripande frågeställningar formulerats;

- Vilka hinder för eleverna kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas i lärandesituationer?

- Hur kan dessa hinder för eleverna överkommas?

- Vilka utmaningar för lärarna kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas i undervisningssituationer?

Avhandlingen är uppbyggd av fyra delstudier som tillsammans skapar underlag för att kunna besvara avhandlingens övergripande frågeställningar.

## 1.2 Delstudierna

I de fyra delstudierna diskuteras olika frågeställningar som bidrar till att besvara kappans övergripande frågeställningarna. Alla delar av varje delstudie kommer inte att behandlas i kappan då fokus för kappan är algebrasvårigheter ur elev- och lärarperspektiv. Resultatet av de tre första delstudierna kommer därför att få ett större utrymme medan för den fjärde delstudien kommer bara delar av resultatet att behandlas här i kappan.

Genom dessa delstudier vill jag fördjupa förståelsen för algebrasvårigheter ur ett elevperspektiv genom att undersöka vilka hinder som förekommer då algebrasvårigheter behandlas i lärandesituationer och hur eleverna kommer förbi dessa hinder. För att undersöka detta studerade jag elever som diskuterade algebraiska problemlösningsuppgifter i små grupper med 3-5 elever/grupp (delstudie 1 och 2). Jag vill också fördjupa förståelsen för algebrasvårigheter ur lärarperspektiv genom att undersöka vilken typ av frågor som lärare ställer i förhållande till algebrasvårigheten för att undersöka vilka utmaningar lärarna möter (delstudie 3). För att få en bredare bild valde jag att studera lärarstudenter då de diskuterade och bedömde elevlösningar med avseende på algebrasvårigheter (delstudie 4).

*Delstudie 1 (Artikel 1)*

> Gustafsson, B. (2016). Swedish students in upper secondary school solving algebraic tasks – What obstacles can be observed? *Proceedings of MADIF 10, The Tenth Mathematics Education Research Seminar*, Karlstad, January 26-27, 2016. Linköping: SMDF (Svensk förening för matematikdidaktisk forskning), s.27–26.

I den första delstudien identifieras hinder för eleverna samt deras karaktär. Resultatet bidrar till att besvara den första övergripande frågeställningen.

*Delstudie 2 (Artikel 2)*

> Gustafsson, B. (2019). How secondary school students make meaning of algebraic signs. Submitted 2019

I den andra delstudien identifieras hinder för elever samt hur eleverna kommer över dessa hinder. Resultatet av denna delstudie bidrar till att besvara de första två övergripande frågeställningarna.

*Delstudie 3 (Artikel 3)*

> Gustafsson, B. (2019). Teachers Questioning in Relation to Algebra Challenges in Secondary School. Submitted 2019.

I den tredje delstudien behandlas lärares frågor i relation till det algebraiska lärandeinnehållet och de algebrasvårigheter som behandlas. Resultatet av denna delstudie bidrar till att besvara den tredje övergripande frågeställningen.

*Delstudie 4 (Artikel 4)*

> Gustafsson, B. (2019). The role of a general analytic rubric in the scoring process: Student teachers' use of a general analytic rubric when scoring pupils' mathematics problem-solving solutions. Submitted to International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2019.

Ett delresultat från den fjärde delstudien är vilken roll en generell bedömningsmatris får för lärares bedömning av kända svårigheter i algebra vilket bidrar till att besvara den tredje övergripande frågeställningen.

## 1.3 Avhandlingens disposition

Avhandlingen består av fyra delstudier samt en kappa. Kappan är skriven för att introducera delstudierna och placera dem i ett sammanhang. I kappan kommer delstudiernas slutsatser att fördjupas och vissa aspekter lyftas så att huvudresultaten och avhandlingens bidrag till den matematikdidaktiska forskningen kommer i fokus.

I kapitel 2 – Algebra, diskuteras avhandlingens teorier i relation till tidigare forskningsresultat. Utgångspunkten är algebra och kända algebrasvårigheter. Därefter behandlas algebrasvårigheter sett ur ett elevperspektiv, först genom en beskrivning av tidigare forskningsresultat och därefter följer en beskrivning av de teoretiska ramverk som används för att analysera elevernas gruppdiskussioner. Slutligen behandlas algebrasvårigheter sett ur ett lärar-

perspektiv. Där beskrivs tidigare forskningsresultat angående undervisning om algebrasvårigheter. Slutligen behandlas lärares frågor i undervisning och bedömning av elevlösningar.

Kapitel 3 – Metod, inleds med beskrivning av urvalet av elever, lärare och lärarstudenter. Därefter beskrivs studiernas insamling av data samt analyserna för respektive delstudie. Avslutningsvis diskuteras de etiska överväganden som gjorts.

Kapitel 4 – Resultatet, inleds med en beskrivning av resultaten från de två första delstudierna med elevperspektivet, med exempel från elevernas diskussioner om några algebraiska problemlösningsuppgifter. Delstudierna 3 och 4 har ett lärarperspektiv och resultaten från dessa studier beskrivs var för sig. Resultaten från delstudie 3 presenteras med hjälp av några exempel från helklassgenomgångar med fokus på lärares frågor i relation till de algebraiska svårigheter som behandlas i undervisningen. Resultaten från delstudie 4 presenterar en sammanfattning av hur lärarstudenter diskuterar och bedömer algebrasvårigheter i elevlösningar.

Kapitel 5 – Diskussion, ger en sammanfattande diskussion som leder fram till att kappans övergripande frågeställningar kan besvaras.

Kapitel 6 – Summary in English ger en kort sammanfattning av kappans innehåll.

# 2 Algebra

*I föreliggande kapitel behandlas avhandlingens utgångspunkter såsom tidigare forskning och teorier. Först diskuteras innebörden av algebra från vilket jag tar min utgångspunkt, vilket inkluderar en kort tillbakablick på algebrans framväxt genom historien fram tills idag. Därefter behandlas några kända algebrasvårigheter som varit en utgångspunkt för mina delstudier. Kapitlet behandlar även tidigare forskning om algebrasvårigheter sett ur elevperspektiv samt ur lärarperspektiv, som jag tar min utgångspunkt ifrån. De teoretiska ramverk som använts i de olika delstudierna presenteras också i relation till elev- och lärarperspektiv.*

Ordet algebra har sitt ursprung i det arabiska ordet ”Al Jabr” som användes av den persiske matematikern al-Khwarizmi på 800-talet i hans arbete om elementär algebra (t.ex. Johansson, 2004; Thompson, 1996). Retorisk algebra kan dock spåras långt tidigare i historien. Algebraiska metoder användes redan i antikens Mesopotamien och Egypten, t.ex. Diophantos i Alexandria på 300-talet löste till största delen första och andragradsekvationer retoriskt där det okända ersattes av matematiska symboler (t.ex. Kline, 1990). Först i slutet av 1500-talet utvecklades den symboliska algebran av den franske matematikern Viète (Johansson, 2004; Kline, 1990). Han anses vara den förste som betecknar både kända och okända storheter med bokstavssymboler. Bokstäverna kunde tolkas som variabler i motsats till att de endast tidigare använts som symbol för obekanta tal. Detta var en förutsättning för att t.ex. utveckla funktionsbegreppet. Viète’s arbete bidrog till att förändra matematiken generellt och var en förutsättning för bl.a. Descartes och Leibniz arbeten (Kline, 1990). Descartes utvecklade bland annat koordinatsystem och använde ekvationer för att beskriva kurvor. Leibniz bidrog till utvecklingen av funktionsbegreppet och infinitesimalkalkylen (Kline, 1990) vilket var början på utvecklingen av den analytiska algebran. Algebra och algebraiskt resonemang har historiskt varit en förutsättning för utvecklingen inom alla områden inom matematik (Kaput & Blanton, 2001).

Kärnan i algebra anser Kaput och Blanton (1999, 2001) är algebraiskt resonemang vilket är komplext sammansatt organiserat kring fem koopererande former av resonemang.

1 *Algebra som generalisering och formalisering av mönster och begränsningar.*

   Denna form delas upp i två underkategorier. Generaliserad aritmetik, egenskaper hos talsystem såsom kommutativitet och inversa relationer och generaliseringar som formuleras om specifika talegenskaper eller relationer såsom att summan av två udda tal är jämn,

regelbundenheter i multiplikationstabellerna. Båda dessa kategorier inkluderar generalisering av likhetsbegreppet.

2 *Algebra som syntaktiskt styrd manipulation av formaliteter.* Denna form inkluderar bl.a. faktorisering och förenkling av algebraiska uttryck.

3 *Algebra som studie av strukturer och system abstraherade från beräkningar och relationer.* Denna form inkluderar resonemang och generalisering av mer abstrakta objekt och system som har sina rötter i den abstrakta algebran, såsom grupper men även matriser.

4 *Algebra som studie av funktioner, relationer och gemensam variation*. Denna form inkluderar generaliseringar av numeriska och geometriska mönster för att beskriva funktioner av beroende variation t.ex. triangulära tal, mönster hos figurers area men även rekursiva relationer. Detta är viktigt för förståelsen av funktionsbegreppet och elevers algebraiska tänkande.

5 *Algebra som en grupp av modellering och fenomen-kontrollerande språk.* Denna form omfattar två olika slag av generaliseringar. De två är generaliserande mönster och regelbundenheter som baseras på matematiska situationer eller fenomen. Generalisering behandlar situationen eller fenomenet där det numeriska mönstret har en stödjande roll för generaliseringen i en större modelleringsuppgift. Den andra formen omfattar generalisering av lösningar på enkla modelleringsuppgifter. Genom att koppla begränsningar i det givna problemet för att kunna göra generaliseringar utifrån uppgiften, inklusive jämförelser med andra modeller och situationer.

Dessa kategorier betonar, enligt Kaput och Blanton (2001), algebrans djup och kopplingar till all matematik. På grund av kopplingarna till all matematik så har algebran en nyckelroll genom grundskolans och gymnasieskolans matematikkurser. Bednarz, Kieran och Lee (1996) föreslog några år tidigare en liknande uppdelning av algebra i fyra former. Algebra är (1) generaliserad aritmetik, (2) ett medel att lösa problem, (3) en studie om relationer samt (4) ett sätt att beskriva samband mellan variabler. Denna beskrivning av algebra motsätter inte Kaput och Blantons (2001) beskrivning även om deras kategorisering är mer omfattande. I litteratur och i forskningsrapporter förekommer liknande kategorisering av algebra t.ex. i Principle and Standards for School Mathematics (National Council of Teachers of Mathematics, 2000)

## 2.1 Algebrasvårigheter

Ofta framkommer det att algebra är en ”gateway” för högre studier (t.ex. Kieran, 2010) och det talas om att algebra även är en ”gatekeeper” vilken är nödvändig för att kunna vara delaktig i samhället och få full tillgång till medborgerliga rättigheter (Moses & Cobb, 2001). Dock upplever många elever och studenter ofta algebra som problematisk (t.ex. Stacey & Chick, 2010).

Trots en mängd forskning om algebra, lärande och undervisning sedan decennier tillbaka (t.ex. Bush & Karp, 2013; Kieran, 2010; Küchemann, 1981; Quinlan 1992; Schoenfeld & Arcavi, 1988; Ursini & Trigueros, 2004; Usiskin, 1988) så finns det fortfarande behov av forskning inom ämnet.

I de följande avsnitt kommer fem av de vanligaste svårigheter som tidigare forskning har visat på[1], att behandlas. Denna indelning av algebrasvårigheter används i analyserna i avhandlingens olika delstudier. Svårigheter definieras här som bekymmer som leder till felaktigheter.

### 2.1.1 Bokstavssymboler i algebra

För många är bokstäverna kännetecknet för algebra. Dessa bokstäver, tecken och symboler används för att kommunicerar den matematiska innebörden. Denna svårighet handlar om hur bokstäver används t.ex. i ekvationer, formler, funktioner och generaliseringar av mönster (Usiskin, 1988, 1996).

Ett exempel på denna svårighet är MacGregor och Stacey’s (1997) undersökning om elevers svar på frågan;

> David är 10 cm längre än Con. Con är *h* cm lång. Hur kan du skriva Davids längd?

Svaren de fick var bland annat 10 + *h*, 10*h*, *h*10 och D*h*. Av de som angav svaret 10*h* eller *h*10 tolkar vissa *h* som enhet. Av de elever som angav svaret D*h* tolkar vissa det som Davids höjd vilket kan bero på det sätt eleverna lärt sig att tolka uttryck, t.ex. 3*a* + 5*b* betyder tre apelsiner och fem bananer, ibland kallat *fruktsallad-algebra* (MacGregor, 1986).

[1] Kategorierna som presenteras är inspirerade av den indelning som Arcavi, Drivjers och Stacey (2017) beskriver i ”The learning and teaching of algebra”.

[2] T.ex. så som Diophantos löste algebraiska problem med hjälp av retorisk algebra.

### 2.1.2 Process – objekt dualitet

Process – objekt dualitet kan beskrivas utifrån Sfard och Linchevski (1994) som betonar att algebra kan vara både operationell och strukturell (process – objekt dualitet). I de tidiga skolåren då aritmetiken är i fokus med siffror och numeriska beräkningar, liksom historiskt[2] (t.ex. Kline, 1990), så finns algebraiskt tänkande långt innan notationerna införs, då problemen löses verbalt och operativt. I de senare åren av grundskolan för man in symboler för det obekanta och detta är början till den strukturella algebran. Problemen är inte av mer komplicerad karaktär än de problem eleverna möter i de tidigare skolåren men fokus ligger på att manipulera algebran i problemen vilket är en övergång till strukturell algebra, poängterar Sfard och Linchevski (1994). Ett exempel på denna svårighet är att lösningen av ekvationssystem ofta representerar en process och ett objekt. Själva lösningsproceduren är ofta en process men ett uttryck behöver ofta behandlas som ett objekt. Utveckling att se algebran både som processer men även som objekt, är viktig för den algebraiska förståelsen.

Denna svårighet handlar om det som Arcavi, Drijvers och Stacey (2017) utvecklar om uttrycken för Davids höjd, $10h$ (eller $h10$) att det kan indikera att eleverna utför en addition då de överför sina erfarenheter från aritmetiken till algebran, till exempel att $5\frac{3}{4}$ indikerar $5 + \frac{3}{4}$ och inte $5 * \frac{3}{4}$. Alltså, genom att förbinda två objekt fysiskt är i enkel mening, en addition, till exempel så kan uttrycket $4 + 2x$ inbjuda till en felaktig addition. Svårigheten i detta sammanhang är att se uttrycket som ett objekt så ser eleven det istället som en process som ska utföras. Det felaktiga svaret kan då vara 6 eller $6x$ ($4 + 2 = 6$) och det slutliga svaret på uttrycket blir $6x$, vilket benämns ”lack of closure obstacle” (t.ex. Collis, 1978; Tall & Thomas, 1991).

### 2.1.3 Likhetstecknets betydelse

I algebra så ska likhetstecknet tolkas som en relation, en likhet, där båda sidorna av likhetstecknet har samma värde och kan ersätta varandra (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Kieran, 1981; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). För många elever är likhetstecknet en signal att utföra något, t.ex. en beräkning vilket ofta är fallet inom aritmetik. Ett exempel på denna svårighet är då elever uppfattar ett algebraiskt uttryck, t.ex. $x + 5$, som ofullständigt vilket måste avslutas.

[2] T.ex. så som Diophantos löste algebraiska problem med hjälp av retorisk algebra.

Denna svårighet handlar om att elever som inte har en relationell förståelse av likhetstecknet ofta anser att 5 = 2 + 3 inte är korrekt eftersom 5 är svaret och då ska det tecknas som 2 + 3 = 5. Eller att elever på frågan vilket tal som ska stå på den tomma platsen i uttrycket 5 + 3 = __ + 2 anger svaret 8 eller 10, då de adderar 2 till 8. Knuth, Stephens, McNeil och Alibali (2006) visar i en studie att utan en relationell känsla för likhetstecknet så kommer det att resultera i svårigheter att lyckas i vidare studier inom algebra.

### 2.1.4 Procedurer för ekvationslösning

Det finns många metoder för att lösa ekvationer och för elever är svårigheten ofta att de inte förstår betydelsen av likhetstecknet. Gissa och pröva kan vara ett användbart sätt att lösa ekvationer, men alla ekvationer kan inte lösas på detta sätt. Vid enkla ekvationslösningar när den obekanta endast finns på en sida av likhetstecknet kan de använda ett aritmetiskt resonemang och lösa ekvationen bakvänt (backwards operations). Istället för att addera så subtraherar man, istället för att multiplicera så dividerar man och så vidare. Denna metod är också kraftfull men man kan inte lösa ekvationer som $4(3+2x) - 5 = 7x$ med den metoden (Arcavi et al., 2017). Istället löser man ekvationen genom att t.ex. göra samma sak i båda leden vilket är ett kraftfullt verktyg för att lösa ekvationer.

Ett exempel på denna svårighet är att lösa ekvationer inte handlar om en process där eleverna kan beräkna ena ledet och producera det andra ledet.

Denna svårighet handlar om att eleverna måste bibehålla likheten vid ekvationslösning. Detta är svårt för många elever. Genom att inkludera ett mer algebraiskt resonemang i lösningsprocessen ökar möjligheterna att övergå till ett mer algebraiskt och relationellt resonemang (Arcavi et.al., 2017).

### 2.1.5 Algebraisk problemlösning

Problemlösning generellt, både aritmetisk som algebraisk problemlösning, är ett viktigt område i dagens skola – så viktigt att i den svenska läroplanen för både gymnasieskolan (Skolverket, 2011a) och grundskolan (Skolverket, 2011b) är det både en förmåga (mål) och ett centralt innehåll (medel). Skolverkets kommentarmaterial (Skolverket, 2011a, b) beskriver att problemlösningsförmågan som *mål* innebär att eleverna ska kunna analysera och tolka problemen och medvetet använda problemlösningsstrategier samt värdera resonemang och resultat och som *medel* för att utveckla övriga förmågor. Där betonar man även att om eleverna får förutsättningar för metakognitiva reflektioner så kan problemlösningsförmågan utvecklas.

Under en lång tid hade Pólyas (1957) beskrivning av problemlösningsstrategi stor betydelse för undervisningen av problemlösning. Hans strategi var; 1) Förstå problemet, 2) Gör en plan, 3) Utför planen, 4) Granska resultatet. Schoenfeld (1992) visade genom sin forskning att denna strategi inte varit så framgångsrik och därför rekommenderade han att man istället skulle undervisa metakognitiva strategier. Så att eleverna lär sig att effektivt implementera sina problemlösningsstrategier och innehållsmässiga kunskaper. Schoenfeld (1992) fann i sin sammanställning av tidigare forskning inom problemlösning att det fanns en mängd olika definitioner som ofta även var motsägelsefulla.

Vad är då problemlösning? Lesh och Zawojewski (2007) föreslår följande definition som översatt lyder;

> En uppgift eller en målinriktad aktivitet blir ett problem (eller problematisk) då ”problemlösaren” måste utveckla ett mer produktivt sätt att tänka om en given situation.

Att *utveckla ett produktivt sätt att tänka,* förtydligar Lesh och Zawojewski (2007), betyder att problemlösaren måste engagera sig i processen att tolka situationen. Matematisk problemlösning handlar om att tolka, beskriva och förklara situationer matematiskt. Utifrån sina resultat av en forskningsstudie om problemlösning (Zawojewski & Lesh, 2003) föreslår de en modifierad problemlösningsstrategi från ett mer socialt perspektiv enligt följande; 1) Använd representationer i kommunikationssyfte, t.ex. om eleven ritat en bild men den är felaktig, är det bra att kommunicera med andra vilket visade sig gav en djupare förståelse. 2) Titta på problemet ur flera utgångspunkter. Om eleven inte förstår problemet kan problemet modifieras för att skapa ett liknande problem och eleven utmanas att tänka i andra banor. 3) Förklara problemet för någon annan. Genom att förklara för varandra och sätta ord på sin förståelse och de når en lösning genom att en gemensam tolkning av problemet.

Att ha ett produktivt sätt att tänka kan inbegripa det som Star och Rittle-Johnson (2008) beskriver som utveckling av flexibel kunskap. En elev som har flexibel kunskap känner till ett flertal strategier att lösa problem på och kan anpassa dem i olika situationer. Elever utan flexibel kunskap har ofta stora problem inom problemlösningsområdet, speciellt inom den algebraiska problemlösningen (Kieran, 1992) även om det också påverkar lärandet inom andra områden.

Ett exempel på denna svårighet är att algebraisk och aritmetisk problemlösning inbegriper flera fundamentala skillnader i resonemang. Bland annat så

är det ett kognitivt steg att övergå från att räkna med tal till att utföra beräkningar med obekanta (Herscovics & Linchevski, 1994). En annan skillnad är övergången från en operationell (Sfard, 1991) eller procedurell (Kieran, 1992) tolkning av det algebraiska uttrycket eller ekvationen till en strukturell (Kieran, 1992) tolkning där man ser uttrycket som ett objekt.

Denna svårighet handlar om att det är en skillnad från aritmetisk problemlösning då man använder de kända talen för att beräkna det obekanta (backwards operations) medan man i algebraisk problemlösning arbetar med de obekanta och kända samtidigt (forwards operations) (Arcavi et.al., 2017). Ytterligare en skillnad är att de obekanta variablerna måste definieras (Arcavi et.al., 2017) och variablerna ska hållas specifika genom hela ekvationslösningen. Stacey och MacGregor (2000) fann till exempel att många elever ser ekvationen enbart som en beskrivning av problemet och inte som ett första steg till att finna en lösning vilket innebär att de använder ett aritmetiskt resonemang.

## 2.2 Elevperspektiv på algebrasvårigheter

I detta avsnitt kommer algebrasvårigheter ur elevperspektiv att behandlas. Först behandlas generellt vad som framkommit i tidigare forskning om respektive algebrasvårighet som beskrivits i 2.1. Därefter beskrivs modellering i problemlösning samt transformationer mellan olika representationsformer att behandlas. Båda dessa har använts i avhandlingens delstudier för att få en fördjupad förståelse av hinder för elevers lärande.

### 2.2.1 Algebrasvårigheter i tidigare forskning

*Bokstavssymboler i algebra.* Ett flertal studier har visat på elevers missuppfattningar då bokstavssymboler används i dessa sammanhang, speciellt då de betecknar en variabel (t.ex. Bills 2001; Kinzel, 1999; Küchemann, 1981; Schoenfeld & Arcavi, 1988: Ursini & Trigueros, 2004).

Quinlan (1992) identifierade 5 hierarkiska nivåer av elevers uppfattningar av bokstäverna:

1. Bokstavssymbolen uppfattas som ett objekt som saknar mening. Bokstavens värde motsvarar dess plats i alfabetet.
2. Bokstavssymbolen uppfattas som att det räcker att pröva ett tal istället för bokstavssymbolen.
3. Bokstavssymbolen uppfattas som att det är nödvändigt att testa flera tal.

4. Bokstavssymbolen uppfattas som representant för en klass av tal. Det räcker att pröva något av talen i den klassen.
5. Bokstavssymbolen är representant för en klass av tal. Man behöver inte pröva något av dessa tal.

De tre första nivåerna visar på en operationell uppfattning av bokstavssymboler medan nivå 4 och 5 visar på en strukturell uppfattning.

Küchemann (1978) gör en annan indelning med 6 olika kategorier av förståelsen av bokstavsymbolerna:

a) Bokstaven värderas. Bokstaven tilldelas ett numeriskt värde.
b) Bokstaven beaktas inte. Bokstaven ignoreras eller dess existens bekräftas utan att ge den mening.
c) Bokstaven beaktas som ett konkret objekt eller som ett objekt i sig själv.
d) Bokstaven beaktas som en specifik obekant. Bokstaven betraktas som ett specifikt men okänt tal.
e) Bokstaven beaktas som ett generellt tal. Bokstaven ses som att den representerar eller åtminstone att den kan anta olika värden.
f) Bokstaven ses som en variabel. Bokstaven ses som att den representerar ett omfång av ospecifika värden och en systematisk relation ses mellan två sådana uppsättningar av värden.

I exemplet i 2.2.1 fick eleverna till uppgift att beskriva Davis längd (MacGregor & Stacey, 1997):

> David är 10 cm längre än Con. Con är *h* cm lång. Hur kan du skriva Davids längd?

Några av svaren var 10 + *h*, 10*h*, *h*10 och D*h*. Enligt Küchemanns kategorisering visar svaren 10*h*, *h*10 och D*h* på att eleverna som gav dessa svar betraktar bokstaven som ett konkret objekt eller ett objekt i sig själv, alltså den tredje kategorin. Eleverna som gav svaret 10 + *h* visar att de ser bokstaven som någon av de tre sista kategorierna. Vissa läroböcker och lärare använder likande förkortningar då man introducerar algebra till exempel *a* för apelsin och *b* för banan, vilket har visat sig kunna leda till missuppfattningen att bokstäver i algebra står för fysiska objekt istället för tal. De missförstånd som svaren 10*h*, *h*10 och D*h* visar på kan bero på det osynliga multiplikationstecknet (Arcavi et al., 2017). ”Bokstav som objekt”-missförstånd kan hindra eleverna i sina fortsatta algebrastudier. Det som var tänkt att förenkla introduktionen blir istället ett hinder.

Ytterligare utmaningar för eleverna kan vara att samma symbol kan användas i flera olika sammanhang. *b* kan till exempel beteckna längden på en

sida i ett geometriskt objekt eller vara en parameter i generalisering av en ekvation $ax^2 + bx + c = 0$. Det kan också vara en etikett för ett objekt eller en enhet (MacGregor & Stacey, 1997; Knuth, Alibali, McNeil; Weinberg & Stephens, 2005). Denna skiftning av betydelsen av bokstaven är problematisk för många elever (Clement, Lochhead & Monk, 1981; Stacey & MacGregor, 1997; Bills, 2001; Knuth et al., 2005) då de både ska hantera betydelsen av symbolen som används och hantera symbolen oberoende av dess betydelse (Dettori, Garuti & Lemut, 2001). Många forskningsstudier behandlar elevers förståelse av variabler (Bush & Karp, 2013). En stor del av resultaten från dessa studier visade Küchemann redan 1978 genom sin kategorisering, såsom att man ser variabeln som en enhet (t.ex. Usiskin, 1988), att skapa ett generellt uttryck för att beskriva ett mönster utifrån en tabell eller figur (t.ex. Stacey & MacGregor, 1997) eller att två olika variabler i en ekvation inte kan anta samma värde (t.ex. Swan, 2000), är några av dessa resultat.

Elevers svårigheter med att skilja på variabler och enheter har också påvisats i studier. Weinberg, Stephens, McNeil, Krill, Knuth, och Alibali (2004) genomförde ett test med elever från årskurs 6, 7 och 8 där en av frågorna var:

> En kaka kostar $k$ dollar och en brownie kostar $b$ dollar. Anta att jag köper 4 kakor och 3 brownies. Vad betyder då $4c + 3b$ (Weinberg et al., 2004, s. 4)

Resultatet visade att 22% av eleverna i årskurs 6, 37% av eleverna i årskurs 7 och 27% av eleverna i årskurs 8 tolkar att uttrycket $4c + 3b$ betyder 4 kakor och 3 brownies. De tolkar alltså variabeln som en enhet.

*Process-objekt-dualitet.* Att tillämpa aritmetiska räkneoperationer och räknelagarna i algebraiska uttryck har visat sig vara en svårighet för eleverna (Herscovics & Linchevski, 1994) som t.ex. viljan att addera termer i algebraiska uttryck. I aritmetiken adderas två tal och man erhåller ett numeriskt svar ($37 + 54 = 91$) vilket är en process. I algebran beskriv en matematisk struktur där det algebraiska uttrycket är svaret ($x + 7 = 7 + x$), vilket är ett objekt. Ett algebraiskt uttryck kan dock representera både en process och ett objekt. Ibland går det att t.ex. förenkla ett algebraiskt uttryck $(2(3x + 5)$, då är det en process medan andra gånger så kan uttrycket endast behandlas som ett objekt ($7x + 3$) (Arcavi et al., 2017; Sfard, 1991).

Elevers problematik med algebraiska uttryck är ett annat område som tidigare studier behandlar. Stacey och MacGregor (1997) fann att elevernas problem med uttryck berodde på att de inte hade den begreppsmässig förståelse för, till exempel att $x + 3$ inte är lika med $x3$ där de alltså utför en process. eller att svaret på ett problem är uttrycket $4x + 5$, ett objekt och inte ett tal.

*Likhetstecknets betydelse.* Ett speciellt kritiskt moment är likhetstecknet. I aritmetik inbjuder oftast likhetstecknet till att göra en beräkning, ”det blir” medan i algebra så måste likhetstecknet ses som ”lika med”. En begreppsmässig (relationell) förståelse för att likhetstecknet är en nödvändighet för att kunna lösa algebraiska ekvationer visar Behr, Erlwanger och Nichols (1980) i en studie. Filloy och Rojanos studie (1989) visar att elever som kan lösa ekvationer som $3x - 1 = 5$ men inte ekvationer som $3x + 2 = x + 6$ saknar begreppsmässig förståelse. Den första ekvationen kan lösas aritmetiskt medan den andra ekvationen kräver algebraisk hantering (se även Bush & Karp, 2013).

*Procedurer för ekvationslösning.* Precis som nämnts ovan så har eleverna betydligt större svårigheter att lösa ekvationer med variabler på båda sidorna om likhetstecknet än om det bara finns variabler på en sida om likhetstecknet (t.ex. Herscovics & Linchevski, 1994). Troligtvis beror detta på att eleverna då inte kan använda aritmetik för att lösa ekvationer. Finns det variabler på båda sidor om likhetstecknet blir det betydligt lättare om de har en begreppslig förståelse för likhetstecknet och kan använda de algebraiska egenskaperna (Bush & Karp, 2013). Svårigheten är att eleverna inte förstår den balans som måste finnas (likheten) då man löser en ekvation (Arcavi et al., 2017). Andra svårigheter i ekvationslösning är subtraktion och negativa tal konstaterar Vlassis i sin studie (2008).

*Algebraisk problemlösning.* Elevers svårigheter med problemlösning har också studerats. Jupri och Drijvers (2016) undersöker i en studie elevers svårigheter med att lösa algebraiska problemlösningsuppgifter. Deras studie visar att eleverna har svårigheter att förstå ord, meningar eller fraser samt att formulera matematiska modeller och ekvationer utifrån en problemtext. Ett klassiskt exempel på det är student-professorsproblemet som Clement, Lochhead och Monk använde i en studie 1981:

> Skriv en ekvation med variablerna $S$ och $P$ för att representera följande uttalande. Det finns sex gånger så många studenter som professorer vid detta universitet. Använd $S$ för antalet studenter och $P$ för antalet professorer. (Clement, Lochhead & Monk, 1981, s. 288).

Flera andra forskare har senare använt detta problem (t.ex. Swan, 2000) i sina studier och de får ofta det felaktiga och omkastade svaret $6S = P$. Även om ett flertal forskningsstudier har visat att ord-problem skapar svårigheter för elever så har andra studier visat att problem insatta i ett sammanhang (verklighetsbaserat) gör att eleverna presterar bättre (t.ex. Doerr, 2010, Nathan & Koedinger, 2000, Walkington, Petrosino, & Sherman, 2013). Ett intressant resultat från studier av utvecklingen av algebrainnehållet i svenska

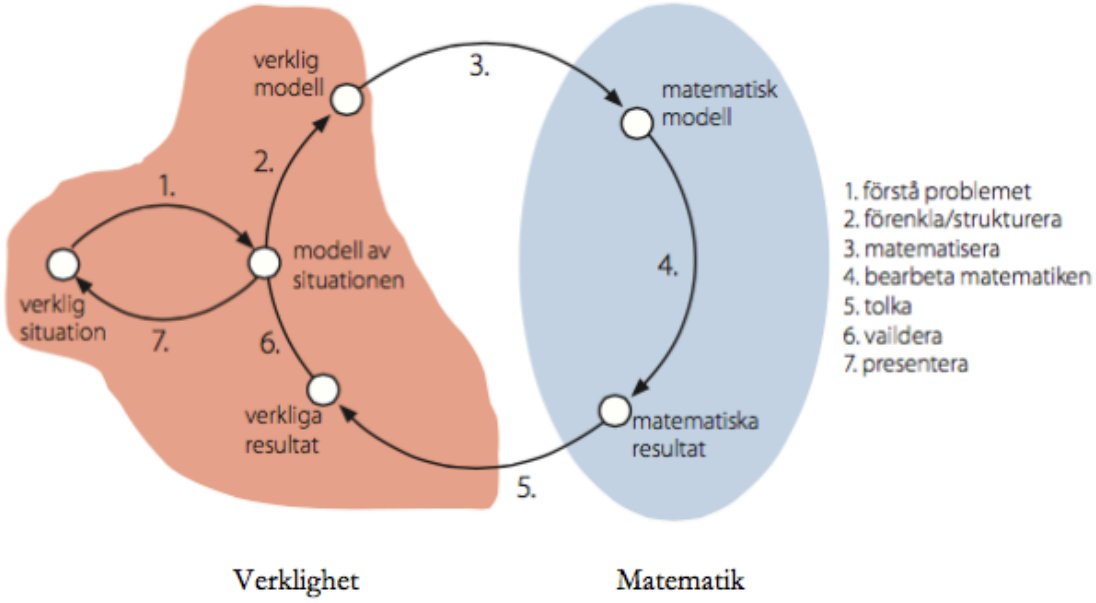
gymnasielärоböcker från 1960 – 2000 utifrån detta resonemang är det Jakobsson-Åhl (2006) presenterar. Det visar att det algebraiska innehållet har ändrats från att ha dominerats av algebraiska manipulationer och uttryck till att vara mer förankrat med verkligheten och vardagssituationer. Samtidigt så har de svenska resultaten i internationella mätningar (PISA) sjunkit inom detta område under samma tidsperiod (Bråting, Hemmi, Madej & Röj-Lindberg, 2013).

### 2.2.2 Modellering i elevers problemlösning

I delstudie 1 och 2 fick eleverna i uppgift att lösa några problemlösningsuppgifter. I dessa uppgifter ingick att bland annat tolka uppgiftstexten och med hjälp av den teckna en ekvation, lösa ekvationen och därefter tolka lösningen och besvara uppgiftens frågeställning. Detta är moment som ingår i modellering. Därför har modelleringscykeln använts för att analysera uppgifterna med avseende på algebrasvårigheter.

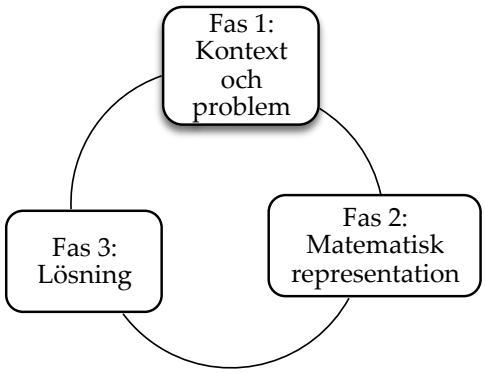
I gymnasieskolans kursplan för matematik (Skolverket, 2011a) ska undervisningen syfta till att eleverna utvecklar modelleringsförmåga genom att använda och utveckla matematiska modeller. Begreppet modellering är dock inte entydigt. Matematisk modellering har olika betydelser i olika sammanhang inom matematikdidaktisk forskning. Sriraman och Kaiser (2006) konstaterar att det inte finns någon enhetlig förståelse för begreppet modellering och dess epistemologiska bakgrund. Redan 20 år tidigare visade Kaiser-Messmer (Sriraman & Kaiser, 2006) att det fanns olika perspektiv på modellering nämligen ett pragmatiskt perspektiv med inriktning på elevernas förmåga att tillämpa matematik för att lösa praktiska problem och ett vetenskapligt-humanistiskt perspektiv med fokus på elevernas förmåga att skapa relationer mellan matematik och verklighet. Denna otydlighet om vad matematisk modellering är ger utrymme för missförstånd i diskussioner om matematikdidaktisk forskning inom området, framhåller Sriraman och Kaiser (2006).

En matematisk modelleringscykel inom forskningssammanhang är en schematisk och idealiserad illustration som beskriver hur modelleringsprocessen förenar *verkligheten* med matematiken (Ärlebäck, 2009). Den kan beskrivas som en upprepad process med olika faser. Ärlebäck beskriver det som en process mellan olika faser och övergångarna mellan faserna. Verkligheten ska förstås och vidare måste den förenklas. Därefter ska den matematiseras, bearbetas, tolkas, valideras och slutligen ska det presenteras ett svar (figur 2.1)




*Figur 2.1.* Matematiks modelleringscykel (Ärlebäck, 2013, s. 25, tillåtelse att kopiera av NCM. Likande figur har tidigare använts av Blum och Leiß t.ex.2007, s. 225).

Antalet faser i en matematisk modelleringscykel kan variera beroende på syfte och fokus för forskningsstudien. I analyserna för avhandlingsarbetet har en modelleringscykel valts med tre faser, baserad på Kehle och Lesters (2003) modelleringscykel (figur 2.2). Denna modelleringscykel valdes för att problemlösningsuppgiften var en enkel uppgift på så sätt att i uppgiften fanns t.ex. ett algebraiskt uttryck givet, så att använda Ärlebäcks modell (2013) skulle medföra att flera faser i modellen inte var aktuella. Kehle och Lesters modell (2003) passade den valda problemlösningsuppgiften bättre i och med att den innehöll färre antal faser. Den första fasen är problemet. Den andra fasen är de matematiska representationerna. Övergången mellan fas 1 och fas 2 handlar om att matematisera problemet. Den tredje fasen är lösningen. Övergången mellan fas 2 och fas 3 handlar om att bearbeta matematiken, lösa problemet. Därefter kommer övergången mellan fas 3 och fas 1 som handlar att tolka lösningen och besvara frågan i uppgiften. I avhandlingsarbetet har främst övergångarna mellan faserna varit i fokus och då har Duvals (2006) semiotiska ramverk använts för att analysera dessa (se 2.2.3).




*Figur 2.2.* Matematisk modelleringscykel (baserad på Kehle & Lester, 2003, p. 98).

En matematisk modelleringscykel är endast en schematisk, förenklad bild av modelleringsprocessen. Ärlebäck och Bergsten (2010) visar genom empiriska studier att processen inte alltid är cyklisk utan kan hoppa mellan olika faser i ett mer icke-cyklisk förhållande.

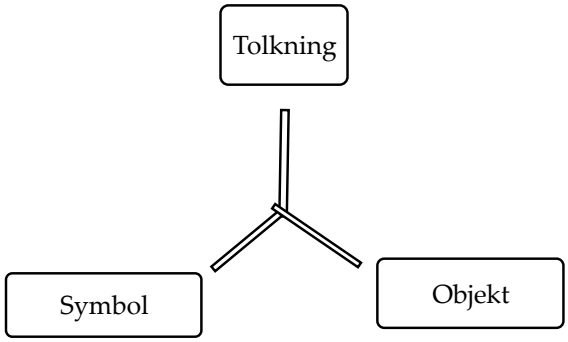
### 2.2.3 Transformationer i elevers problemlösning

Resultaten från analyserna av uppgifterna med modelleringscykeln används därefter för att analysera övergångarna mellan de olika representationsformerna som förekommer i uppgifterna med avseende på algebrasvårigheter. Övergångar som härmed kommer benämnas transformationer.

En transformation involverar två former av representationer och innebär att byta en källrepresentation till en målrepresentation. Enligt Lesh, Landau och Hamilton (1983) så är transformationens syfte att bevara den matematiska betydelsen mellan de olika representationerna. Duval (2006) betonar att hindret i problemlösning ofta är elevernas förmåga att transformera det matematiska teckensystemet vilket även kallas matematiskt representationssystem. Tecken måste tolkas och det innebär att en matematisk process är involverad genom att man ersätter någon semiotisk representation med en annan (Duval, 2006).

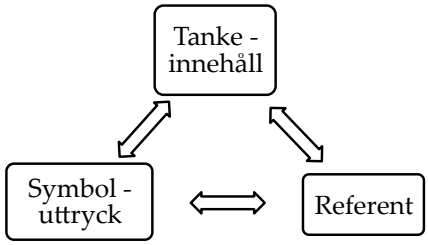
Semiotik handlar om studier av tecken. Peirce (1998) menar att allt meningsskapande är medierat med tecken och semiotik är studier om hur dessa tecken underlättar meningsskapandet. Med andra ord är semiotik studier om hur mening bildas och hur betydelser av tecken uppfattas i kommunikativa handlingar såsom tal, skrift, gester etc. Peirce (1998) förklarar semiotik som en oreducerbar triadisk interaktion mellan tecken, objekt och tolkning.

Dessa tre existerar endast i en dynamisk relation till varandra, betonar Peirce (figur 2.3).




*Figur 2.3.* Semiotikens triadiska natur enligt Peirce (1998).

Ord i sig själva betyder ingenting. Det är bara i ett sammanhang de har en mening betonar Ogden och Richards (1952). De förtydligar, betydelsen av orden är en relation mellan A och B där A betyder B, där B är ett tecken för A. Ett tecken är ett instrument för vad den anpassas till och tolkningen är baserad på erfarenheter. Ogden och Richards (1952) förtydligar sambandet i sin semiotiska triangel. Tanken symboliseras av symbolen och refererar till referenten. Symbolen står för referenten. Denna relation är indirekt (tillskriven) medan kopplingarna mellan tanke och symbol respektive referent är direkt (figur 2.4).

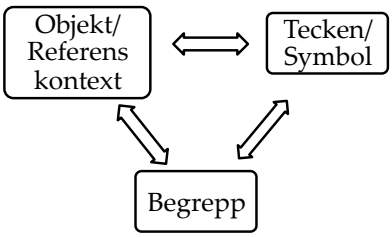



*Figur 2.4.* Semiotisk triangel enligt Ogden och Richards (1952).

Matematiken är abstrakt och för att få tillgång till de matematiska begreppen eller objekten så krävs att kunna tolka de olika matematiska tecken och symboler som används. För att få tillgång till matematiska objekt så måste semiotiska representationer kunna användas (Duval, 2006). Steinbring (2006) beskriver matematiska teckens två betydelser.

> Ett tecken eller symbol är något som står för något annat (ett objekt) och det är en konstitution av matematisk kunskap (ett begrepp).

Relationen mellan dessa tre representeras av sidorna i den epistemologiska triangeln (figur 2.5).

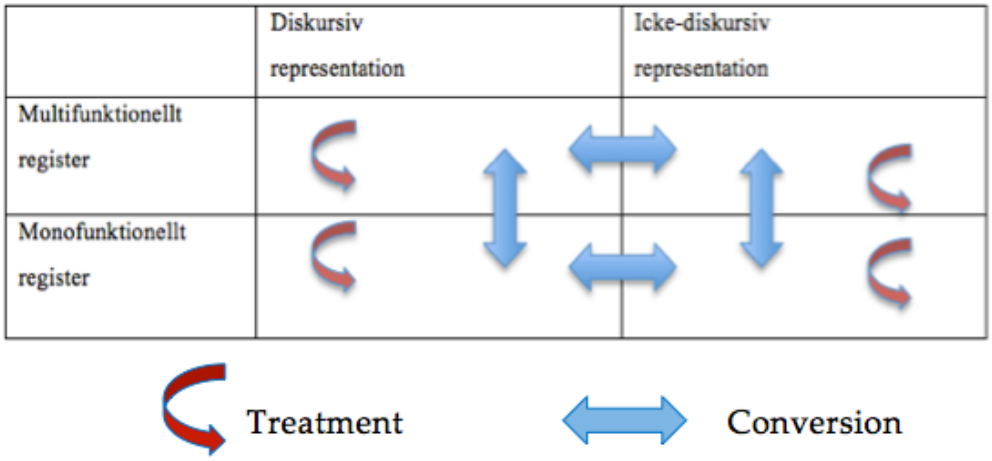



*Figur 2.5.* Epistemologisk triangel (Steinbring, 2009, s. 22).

Ett tecken är ett historiskt utvecklat kulturellt redskap. Dess mening utvecklas och förstås olika, i olika kulturer och individuellt (Duval, 2006). De har även utvecklats med avseende på regler och beskrivningar av en process, ett fenomen eller ett system. Tecken har således ingen mening i sig själv, de relaterar till ett objekt. Matematiska begrepp relaterar både till tecken och objekt och bestäms av epistemologiska matematiska kunskapsförhållanden (Steinbring, 1991). Matematisk kunskap kan dock inte erhållas genom att bara manipulera matematiska tecken och symboler. Tecken måste tolkas vilket kräver erfarenheter och implicit kunskap (Steinbring, 2009) men en matematisk process kräver också att semiotiska representationer ersätts av andra (Duval, 2006). Detta har visat sig vara ett betydande hinder i problemlösning för eleverna, att utföra transformationer mellan representationssystem. Duval beskriver två olika slag av inom-matematiska transformationer, *treatments* och *conversions*. Dessutom använder han ordet registret för att beteckna ett semiotiskt system som tillåter omvandling av representationer (Duval, 2006, s. 111). Treatments är transformationer inom ett semiotiskt system (t.ex. lösa en ekvation). Conversions är en transformation där man byter semiotiskt system men behåller samma begreppsreferens, t.ex. när man för en funktion byter från en algebraisk representation till en grafisk representation.

Duval delar upp register i *monofunktionella* och *multifunktionella*. Monofunktionella register inbegriper matematiska processer vilka oftast är algoritmiska, såsom numeriska beräkningar, algebraiska processer etc. Multifunktionella register inbegriper processer som inte kan göras om till algoritmer, såsom naturligt språk, bevis etc. Vidare så skiljer han mellan diskursiva och icke-diskursiva representationer. Diskursiva representationer innebär förklaringar av samband etc. Icke-diskursiva representationer inbegriper figurer, gra-

fer och diagram. Transformationer sker mellan och inom dessa fyra varianter av register och representationer (figur 2.6).




*Figur 2.6* Klassificering av de register och representationer som kan mobiliseras i matematiska processer (förenklad modell utifrån Duval, 2006, s. 110).

Conversion är, enligt Duval, mest utmanande för eleverna då det är en kognitiv komplexitet att byta register. Ett exempel på det är då man går från en problemtext i naturligt språk till att transformera problemet till algebraisk representation, det algebraiska symbolspråket.

Flera forskare har studerat algebra och transformationer (t.ex. Adu-Gyamfi, Stiff, & Bossé, 2012; Bossé, Adu-Gyamfi, & Chandler, 2014; Gagatsis, & Shiakalli, 2004; Janvier, 1987; Jupri, Drijvers, & Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). De transformationer de har studerat har varit mellan någon av representationerna algebraiskt uttryck, tabell eller graf. Det finns dock en brist på studier om transformationerna mellan det naturliga språket och algebraisk skrift, enligt vad jag har erfarit.

## 2.3 Lärarperspektiv på algebrasvårigheter

I följande avsnitt kommer tidigare forskning om undervisning och algebrasvårigheter ur lärarperspektiv att behandlas. Därefter kommer olika undervisningsstrategier att behandlas med avseende på vilka frågor som ställs i klassrumsundervisningen då algebra behandlas. Avslutningsvis behandlas algebrasvårigheter i bedömningssituationer. Dessa perspektiv på frågor och bedömning har använts i delstudierna som behandlar lärarperspektiv på algebrasvårigheter.

### 2.3.1 Undervisning och algebrasvårigheter i tidigare forskning

Som nämnts tidigare så är algebra en hörnsten för elevers progression inom matematik men också något många elever har stora svårigheter med. Detta beror på algebrans abstrakta karaktär och att den ofta introduceras utan någon kontext med algebraiska uttryck eller ekvationer (Arcavi et. al., 2017). Trots att ett flertal studier visar på att elevers svårigheter i algebralärande beror på att algebran introduceras med procedurer av ekvationslösning eller algebraiska uttryck som saknar mening och syfte så har denna forskning inte påverkat undervisningen i någon större utsträckning (Doerr, 2010). Dessutom så behöver forskning om undervisning av algebra prioriteras, vilket har påpekats av ett flertal forskare (t.ex. Doerr, 2010). Undervisning är komplex och består av många delar, som också är involverade i algebraundervisning..

*Ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper.* Undervisning innebär att läraren ska bisitta en rad olika kunskaper. Enligt Shulman (1987) krävs kunskaper inom flera områden för att undervisa i matematik: ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper. I ämneskunskaper ingår att kunna de områden som ska behandlas, kunna kommande ämnesinnehåll samt angränsande områden. Pedagogisk ämneskunskap[3] innefattar ämneskunskaper i relation till studenter, undervisning och kursplaner (Ball, Thames & Phelps, 2008). Exempelvis måste läraren kunna förklara genom olika matematiska representationer, ha alternativa sätt att förklara och använda olika exempel. Undervisning i algebra kräver de beskrivna kunskaperna men även att kunna begreppsliggöra algebran då algebra i sin natur är abstrakt (Doeer, 2010). I avsnitt 2.1 beskrivs Kaput och Blantons beskrivning av algebrans djup och komplexitet genom fem koopererade former (2001) och Bednarz, Kieran och Lees (1996) fyra former av algebra. Denna komplexitet som algebran bisitter har visat sig vara svår även för lärare att beskriva, enligt flera forskningsstudier (t.ex. Johnson, 2001; Menzel, 2001). Bishop och Stump (2000) undersökte detta och fann att lärare gärna betonar att kärnan i algebra är procedurkunskaper i att lösa ekvationer vilket är något som skolalgebran behandlar till stor del. Medan forskning om elevers algebrasvårigheter tyder på att svårigheterna ofta beror på bristen på begreppskunskaper.

[3] Begreppet pedagogiska ämneskunskaper (Pedagogical content knowledge, PCK) som Shulman myntade i slutet av 80-talet har visats sig vara svårt att definiera, därav har andra myntat andra begrepp så som *matematiska kunskaper för undervisning* (Hill, Ball & Schilling, 2008).

*Begrepps- och procedurkunskaper i undervisningen.* Ett flertal matematikdidaktiska forskare har under de senaste årtiondena betonat att procedurkunskaper och begreppskunskaper kompletterar varandra och bör integreras (t.ex. Kieran, 2010). Pesek och Kirschner (2000) anser däremot att procedurkunskaper har en stödjande roll till begreppskunskaper i elevernas lärande. Star (2005) visar genom en genomsökning av forskning angående procedurkunskaper som ofta anses ytliga gentemot begreppskunskaper som definieras som djupa, att det inte finns så många studier gjorda på effekten av elevernas procedurkunskaper och därför något som bör studeras innan det går att avgöra om något är bättre eller sämre. Arcavi med kollegor (2017) understryker istället vikten av procedurkunskaper för att automatisera handhavandet med algebraiska uttryck och ekvationer. Det får dock inte vara fokus på monotona reproducerande procedurer utan det bör vara kreativa utmaningar i arbetet med proceduruppgifter. Ett exempel på en sådan uppgift kan vara att utifrån ett algebraiskt uttryck konstruera en egen uppgift som kan beräknas med hjälp av uttrycket. Stacey och MacGregor (1997) poängterar att genom att använda algebraisk notation i olika sammanhang och understryka att variablerna står för tal och inte en enhet gör att eleverna ges större möjligheter att utveckla begreppslig förståelse.

Tidigare forskning om undervisning har fokuserat på begreppen funktion, lutning, ekvationer, variabler och uttryck. Stein, Baxter och Leinhardt (1990) fann i sin studie att undervisningen om funktioner ofta var instrumentell eller inriktad på procedurer vilket medför att eleverna lärde sig procedurer men inte fick begreppskunskaper. Undervisning om lutning har också studerats. Enligt Stump (1999) bygger undervisningen ofta på elevernas tidigare erfarenheter såsom hur brant grafen är, vinkel och kvot dock knapphändigt om att det handlar om en förändringshastighet och att två variabler är involverade vilket skulle vara bra för förbindelsen med derivata i kommande kurser.

*Process-objekt-dualitet.* Tirosh, Even och Robinson (1998) studerade ett annat problematiskt område för eleverna, process-objekt dualitet, där eleverna har en tendens att avsluta uttrycket $5x + 4$ som $9x$. De såg i sina studier att lärarna inte uppmärksammade elevernas problematik. Lärarna behöver ha alternativa förklaringsmodeller och förklara på olika sätt för olika elever. I undervisningen bör dock elevernas missuppfattningar inte negligeras utan ses som en möjlighet till lärande, betonar Arcavi et al. (2017) genom att synliggöra olika varianter av missuppfattningar för eleverna kan eleverna uppmärksammas på de hinder som förekommer.

*Algebraisk problemlösning och procedurer för ekvationslösning.* Ytterligare ett exempel på utmaning i undervisningen av algebra (som även beskrivits i 2.2.1) fann Nathan och Koedinger (2000) genom en studie; att läroböckerna ofta introducerar algebra med symboliska procedurer för att lösa ekvationer innan problemlösning medan deras forskning visade att eleverna presterade bättre om man hade gjort tvärtom. I svenska läroböcker har andelen problemlösning ökat i förhållande till algebraisk manipulation över tid. Under samma tidsperiod som ökning av andelen problemlösning har skett så har de svenska resultaten i algebra sjunkit i den internationella undersökningen, PISA (Bråting et al., 2013). Dock har inte ordningen mellan symboliska procedurer och algebraiskproblemlösning i de svenska läroböckerna förändrats.

*Undervisningsförslag från forskningsstudier.* För att öka elevernas möjlighet till begreppslig förståelse så föreslår ett flertal forskare utifrån sina studier att alltid länka algebraiska ekvationer till tabell och graf (t.ex. Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006). Arcavi med kollegor (2017) behandlar problematiken om hur undervisningen kan bidra till att eleverna presterar bättre. De anser att om eleverna ska bli motiverade och förstå syftet med algebra så måste de få arbeta med uppgifter som känns meningsfulla för dem. Exempelvis vid undervisning om kvadratiska ekvationer behandlas ofta problemlösningsuppgifter med en rektangel som ska göras större och då utökas med en lika bred remsa på ett antal sidor. Detta sätts in i en kontext som ska vara verklighetsbaserad men är egentligen väldigt orealistisk och gör inte att eleverna upptäcker algebran som ett kraftfullt verktyg att använda för att lösa problem. Arcavi et. al. (2017) föreslår istället att man behandlar realistiska problem som inte nödvändigtvis behöver referera till det verkliga livet. Ett sådant exempel är att låta eleverna beräkna 5*5 – 6*4 och 6*6 – 7*5 osv. och upptäcka att resultatet alltid blir 1. Därefter fortsätta med att skriva det på generell form, förenkla och visa att det stämmer för alla tal, $x$. $x^2 - (x + 1)(x - 1) = 1$. Denna variant av uppgift visar på algebrans suveränitet och kan göra att eleverna upptäcker att ett aritmetiskt problem som med hjälp av algebra gör att inte alla tal behöver kontrolleras för att visa att likheten är sann.

### 2.3.2 Frågor i lärares undervisning

Centralt för avhandlingen är undervisning och lärande. Syftet är att fördjupa förståelsen för undervisning och lärande av algebrasvårigheter. Språket gör det möjligt att kunna studera hur det matematiska innehållet blir meningsfullt för eleverna då språket är en förutsättning för både individens tän-

kande och kommunikation med andra. Språket har dessutom en helt avgörande och fundamental roll för allt lärande (Dysthe, 2003). I följande avsnitt beskrivs olika kommunikationsmönster som tidigare forskning visat förekommer i matematikklassrum. Kommunikationsmönstret ligger till grund för vilka frågor som lärarna ställer i undervisningssammanhang vilket kommer att behandlas i den senare delen av detta avsnitt.

Helklassdiskussioner i matematik kan vara en utmaning för lärare (Ulleberg & Heiberg-Solem, 2018). Det är mycket som ska behandlas i undervisningen, såsom olika tekniker och procedurer. Det räcker dock inte, eleverna behöver även lära sig tänka matematiskt (Jones & Tanner, 2002). Det är lika viktigt för eleverna att lära sig att uppfatta, reflektera, analysera och kommunicera för att ge mening åt matematiken. Flera studier har påpekat vikten av hur matematik kommuniceras som en avgörande faktor för framgång (se t.ex. Draper, 2002; Sfard, 2008). Kommunikation i matematikklassrum har ofta karaktäriserats av frågor och svar. Ett flertal studier under de senaste fyra årtiondena visar att klassrumskommunikationen ofta är asymmetrisk och att en tredelad dialog dominerar (Wells, 1993). Redan 1979 fann Mehan detta kommunikationsmönster, IRE: *initierande fråga* (I), då läraren ställer fråga och bestämmer vem som ska få svara och när, *respons* (R), en elev svarar (ofta med ett eller bara några ord) därefter *utvärdering* (E), då läraren värderar svaret och följer upp elevens svar. Lemke (1990) benämnde detta mönster *triadisk dialog* medan Alrø och Skovsmose (2002) kallar det *excercise paradigm*. Senare studier visar att IRE-mönstret fortfarande används i matematikklassrum (t.ex. Kyriacou & Issitt, 2008) trots att det har varit många kritiska röster till detta kommunikationsmönster. Cazden (1988) fann att lärare som använder IRE-mönster tenderar att fokusera mer på interaktionen än på vad eleverna faktiskt lär sig. Barnes (1992) visade på att IRE-mönstret kan hindra eleverna i deras inlärning av det matematiska innehållet. Alrø och Skovsmose (2002) visar i sin studie att frågorna ofta ställs på så sätt att eleverna lätt gissar svaret vilket leder till att eleverna koncentrerar sig mer på att gissa rätt svar än på lärandeinnehållet. Lemke (1990) fann liknande möster. Trots de kritiska studierna så finns det röster som menar att det inte behöver vara negativt. Wells (1993) menar att det kan stötta elevernas lärande genom den strukturerade dialogen och elevernas idéer kan följas upp genom lärarens följdfrågor. Newman, Griffin och Cole (1989) hävdar att i och med att läraren har sista ordet finns det en inbyggd reparationsstruktur i dialogen då felktiga svar från eleven kan justeras.

En konversation där elevernas idéer följs upp av lärarens följdfrågor kan vändas till en mer undersökande konversation där både elever och lärare

kan ställa nyfikna och öppna frågor till varandra och förklara sina idéer (Alrø & Johnsen-Høines, 2012). Bland försöken att stötta och påverka undervisningen i matematikklassrummet utarbetade Alrø och Skovsmose (2002) den *undersökande samarbetsmodellen* (IC-Model). Modellen bygger på att kunskap måste erövras och utvecklas, men kunskap kan inte levereras. Målet med modellen är att öka kvaliteten på kommunikationen i matematikklassrummet och elevernas kunskaper i matematik genom att man tillsammans undersöker och utforskar matematiken. Ett huvudvillkor och väldigt centralt i modellen är aktivt lyssnande där lyssnaren har ett ansvar att inte bara passivt absorbera orden utan aktivt försöka förstå fakta och känslor i samtalet. Syftet är att lyssna och prata med varandra samt samarbeta och utforska matematiska fenomen, att lyssna och prata med varandra med respekt och ansvar. Dessa känslomässiga aspekter är en väsentlig del av lärandeprocessen som ger kvaliteter till lärprocessen, enligt Alrø och Skovsmose (2002). Genom aktivt lyssnande kan läraren lokalisera elevernas perspektiv, vilket innebär att förstå eller vara medveten om något som inte var känt förut. Detta kan utredas genom att utforskande eller fördjupande frågor ställs. Därmed blir matematiska idéer och procedurer synliga och idéerna kan undersökas ytterligare. Idéerna kan vidare omformuleras i interaktionen för att tydliggöra för varandra och för sig själva. Denna omformulering kan lägga fokus på centrala idéer och eleverna kan få bekräftelse på att de har förstått. Läraren eller eleverna kan utmana för att stärka förståelsen och självförtroendet i matematik, stödja nya idéer och möta nya kunskaper. Frågan om "rätt" och "fel" ska inte dominera. Snarare ställs frågor som stöd, konstruktiv återkoppling och kritisk diskussion om vad eleverna har lärt sig så att förståelsen fördjupas (Alrø & Skovsmose, 2002). En sådan kommunikation kan bidra till att eleverna delger varandra sina idéer vilket kan hjälpa eleverna att fördjupa sin matematiska förståelse betonar Brendefur och Frykholm (2000). Dessutom kan en forskande kultur skapas i klassrummet med en öppen och nyfiken preferens för ämne (Alrø & Johnsen-Høines, 2012).

En forskande kultur i klassrummet kan stödjas av frågor från lärarna betonar Moyer och Milewicz (2002). Frågeställningar kan vara ett verktyg för att engagera eleverna och utvärdera elevernas kunskaper i matematik (Mason, 2000) men om det ska vara ett användbart verktyg är det viktigt vilken typ av frågor lärarna ställer. Stigler och Hiebert (1999) fann att i matematikundervisning används ofta snabba frågor som kräver bara något ord som svar (IRE-mönster). Ralph (1999) föreslår i stället att lärarna bör förbereda viktiga frågor och ge eleverna tid att tänka och förbereda sina svar vilket kan hjälpa lärarna att förstå elevernas matematiska tänkande. Därför är lärarnas med-

vetenhet om vilka frågor de ställer viktigt och utmanande, betonar Boaler och Brodie (2004).

Forskning om frågor i klassrummet har visat att lärare ofta ställer frågor på lägre nivå (kunskaps- och förståelsefrågor) och sällan frågor på högre nivå (analys, syntes och utvärderingsfrågor) (Bloom, 1956) även om frågorna på högre nivå har identifierats som viktiga för elevernas förståelse (t.ex. Hiebert & Wearne, 1993). Vissa forskningsstudier har visat att mer öppna frågor bidrar till elevernas konstruktion av matematisk kunskap (t.ex. Sullivan & Clarke, 1992). Hiebert och Wearne (1993) hävdar istället att frågor måste ses i ett sammanhang. Därför kan det vara så att lärarna använder frågor på lägre nivå, eller slutna frågor, i vissa sammanhang och frågor på högre nivå, eller öppna frågor, i ett annat sammanhang beroende på undervisningsinnehållet.

Denna avhandling kommer bidra till att fördjupa förståelsen för lärares frågor. Vi vet en hel del om algebrasvårigheter både ur elevperspektiv och ur lärarperspektiv. Dessutom finns det en mängd forskning om lärares frågor i matematikklassrummet. Studier har visat att öppna frågor på högre nivå är att föredra för elevernas begreppsliga förståelse. Det saknas dock forskning om lärares frågor i förhållande till algebrasvårigheter vilket resultatet från delstudie 3 kommer bidra med.

### 2.3.3 Bedömning av elevlösningar

Syftet med detta avsnitt är att skapa en grund genom tidigare forskning angående bedömning av matematik och algebrasvårigheter.

Under de senaste decennierna har matriser blivit en populär bedömningsmetod (Moskal, 2000; Rezaei & Lovorn, 2010). En matris är ett beskrivande dokument med ett antal bedömningskriterier, se tabell 1 (Pandero & Jonsson, 2013; Reddy & Andrade, 2010).

*Tabell 2.1.* Bedömningsmatriser

| Typ av bedömning | Generell matris | Uppgiftsspecifik matris |
|---|---|---|
| Analytisk bedömning (Korp, 2003; Moskal, 2000) | Bedömningen med en generell analytisk matris grundar sig på olika aspekter av produkten. Anvisningarna är generella och anpassade för flera uppgifter. | Bedömningen med en uppgiftsspecifik analytisk matris grundar sig på olika aspekter av produkten. Anvisningarna är anpassade för en speciell uppgift. |
| Holistisk bedömning (Korp, 2003; Moskal, 2000) | Bedömningen med en generell holistisk matris grundar sig på ett allmänt intryck av helheten. Anvisningarna är generella och anpassade för flera uppgifter. | Bedömningen med en uppgiftsspecifik holistisk matris grundar sig på ett allmänt intryck av helheten. Anvisningarna är anpassade för en speciell uppgift. |

Med den analytiska matrisen bedöms varje aspekt separat och eftersom varje aspekt är uttryckligen beskriven ger det en möjlighet för eleverna att förbättra sina prestationer (Moskal, 2000) jämfört med den holistiska matrisen där det endast finns en övergripande beskrivning för varje poängnivå (tabell 2.1). I den generella matrisen är kriterierna allmänna för att passa flera uppgifter medan den uppgiftsspecifika matrisen är utformad efter en specifik uppgift. Enligt en studie genomförd bland svenska lärare av Kjellström och Olofsson (2001) så föredrar lärare uppgiftsspecifika matriser och de har även visat sig vara mer användbara än generella matriser (Moskal, 2000) men de kräver mer arbete att utforma (Crusan, 2010).

Pandero och Jonsson (2013) bland många andra har studerat effekterna av bedömning med matriser med avseende på elevers prestationer, matrisers tillförlitlighet (t.ex. Meier, Rich & Cady, 2006) och betydelsen av lärarnas utbildning i användandet av matriser (t.ex. Lovorn & Rezaei, 2011). Studier har visat att matriser medför flera fördelar i bedömningsprocessen både för lärare och elever. Arter och McTighe (2001) samt Beyreli och Ari (2009), bland andra, visade genom sina studier att eleverna fick mer meningsfull återkoppling och de var även ett komplement för lärarna i sina utvärderingar av undervisningen (Moskal, 2000). Jonsson och Svingby (2007) visade även på att matriser gynnar lärandet vilket förbättrade elevernas prestationer. Detta sker genom att eleverna får veta vilka kriterier de har uppnått och hur de ska förbättra sina prestationer (Andrade, Du & Wang, 2008). Alltså,

enligt många olika studier, har matriser en stor potential för både elever och lärare för att förbättra lärande och undervisning.

Trots att det finns flera kombinationer av matriser (tabell 2.1) så saknas det forskning om effekterna av de olika kombinationerna, enligt Pandero och Jonsson (2013). Det finns ett antal studier om effekterna av den holistiska matrisen, dock saknas det studier om effekterna när det gäller den analytiska matrisen. Enligt Hafner och Hafner (2003) så är det dock den analytiska matrisen som används mest och ger eleverna mest meningsfull återkoppling. Det saknas alltså forskning om effekterna av olika kombinationer av matriser. Dessutom finns det bara ett fåtal studier gjorda inom matematik.

Meier, Rich och Cary (2006) samt Lane (1993) har studerat matrisers användning i bedömning av matematik. Meier med flera (2006) har studerat likvärdigheten i bedömningen med en generell analytisk matris. De jämförde hur matematiklärare och forskande lärarutbildare bedömde elevarbeten. Studien visade på stora skillnader i bedömningen. Slutsatserna från studien var att bedömning med en generell analytisk matris kräver träning och professionell utbildning. Lane (1993) som utformade den generella analytiska matrisen Meier använde, fann också i sin studie att den generella matrisen kräver träning.

I delstudie 4 undersöktes hur algebrasvårigheter bedömdes med hjälp av en generell, analytisk matris då forskning om detta saknas och behovet av detta är stort då elevers brister i algebra skapar svårigheter i deras kommande studier i matematik.

# 3. Metod

*I föreliggande kapitel beskrivs inledningsvis deltagande lärare, elever och lärarstudenter. Därefter beskrivs genomförandet av delstudierna, insamling av data samt dataanalyserna för respektive studie. Avslutningsvis så behandlas etiska överväganden för studierna.*

Det övergripande syftet för denna avhandling är att fördjupa förståelsen för algebrasvårigheter sett ur elevperspektiv och lärarperspektiv. De fyra delstudierna som genomförts ger underlag för att avhandlingens övergripande frågeställningarna kan besvaras. Dessa frågeställningar handlar om vilka hinder för eleverna som kan identifieras då man behandlar algebrasvårigheter i lärandesituationer och hur de kommer över dessa hinder samt vilka utmaningar för lärare som kan identifieras då de behandlar algebrasvårigheter i undervisningen. Tabell 3.1 visar vilka metoder som använts för att kunna bidra till att avhandlingens övergripande frågeställningarna kan besvaras.

*Tabell 3.1* Metoder i delstudierna

| Delstudie | Metod |
|---|---|
| 1 | Gymnasieelevers problemlösningsdiskussioner analyseras med avseende på algebrasvårigheter med hjälp av modelleringscykeln och Duvals ramverk om transformationer. |
| 2 | Årskurs 8-elevers problemlösningsdiskussioner analyseras med avseende på algebrasvårigheter med hjälp av Duvals ramverk om transformationer. |
| 3 | Lärares frågor under genomgångar analyseras med avseende på algebrasvårigheter med hjälp av en matris över olika typer av frågor. |
| 4 | Lärarstudenters bedömningsdiskussioner av elevlösningar analyseras med avseende på hur algebrasvårigheterna i lösningarna bedöms. |

## 3.1 Deltagare

De två första delstudierna, med fokus på eleverna, omfattar ca 110 elever från högstadiet samt från gymnasiets årskurs 1 högskoleförberedande program, en klass från samhällsvetenskapliga programmet samt en klass från

naturvetenskapliga programmet (se tabell 3.2). Dessa grupper är valda för att kunna studera vilka hinder som förekommer då algebra introduceras i början av elevernas lärande av den mer formella algebran.

Den tredje delstudien omfattar totalt 7 lärare och elever från 10 klasser med totalt ca 250 högstadie- och gymnasieelever. Dessa klasser är valda på så sätt för att kunna studera hur algebra introduceras i olika årskurser vilket kan ge variationer i hur frågor används i algebraundervisningen. De deltagande matematiklärarna är legitimerade matematiklärare för de åldersgrupper som de undervisar i och har 6-30 års undervisningserfarenhet.

Den fjärde delstudien omfattar 16 lärarstudenter som vid studiens genomförande deltog i en matematikdidaktisk kurs med inriktning på bland annat bedömning. Lärarstudenterna genomgick vid studiens genomförande i en matematikdidaktisk kurs för blivande lärare i högstadiet och gymnasiet där bedömning var ett kursinnehåll.

Alla deltagare i delstudierna beslutade själva och godkände sitt deltagande i dessa forskningsstudier.

*Tabell 3.2*. Antal deltagare i de olika delstudierna

| | Delstudie 1 | Delstudie 2 | Delstudie 3 | Delstudie 4 |
|---|---|---|---|---|
| Elever årskurs 7 | | | 23 | |
| Elever årskurs 8 | | 20 | 69 | |
| Elever årskurs 9 | | | 72 | |
| Elever årskurs 1 samhällsvetenskapliga programmet | 32 | | 32 | 29 |
| Elever årskurs 1 naturvetenskapliga programmet | 61 | | 61 | 61 |
| Lärare | | | 7 | |
| Lärarstudenter | | | | 16 |

## 3.2 Insamling av data

Gruppdiskussionerna med elevgrupperna i de två första delstudierna spelades in (både audio och video) och materialet transkriberades. De anteckningar och beräkningar eleverna gjorde då de diskuterade och löste pro-

blemlösningsuppgiften samlades också in för att kunna analysera deras diskussioner utan att data skulle förloras.

Alla helklassgenomgångar i delstudie 3 spelades också in och materialet transkriberades. Extramaterial som lärarna delade ut samlades in som komplement till det inspelade materialet.

Lärarstudenternas bedömningsdiskussioner i delstudie 4 spelades in och transkriberades. Deras skriftliga bedömningar och anteckningar i elevlösningarna samlades också in för att komplettera deras bedömningsdiskussioner.

## 3.3 Analyser

Genomförandet av studierna, kategorisering och analysarbetet är genomfört av mig men för att öka tillförlitligheten och validitet har delar av data, kategoriseringar och analyser av data diskuterats med andra forskare. Detta gjordes för att säkerställa att all analys och kategoriseringar skett på ett så objektivt sätt som möjligt.

### 3.3.1 Analys i delstudie 1 och 2 – Gymnasieelever och högstadieelever diskuterar problemlösningsuppgifter

Analysen av data i delstudie 1, från 32 grupper av gymnasieelever ur årskurs 1 som deltog i studien, startade efter det att en problemlösningsuppgift (Frysboxen se figur 3.1) hade transkriberats.

När en frysbox stängs av stiger temperaturen. Följande formel kan användas för att beräkna temperaturen ($y$) i grader Celsius då en frysbox har varit avstängd i $x$ timmar.

$y = 0{,}2x - 18$

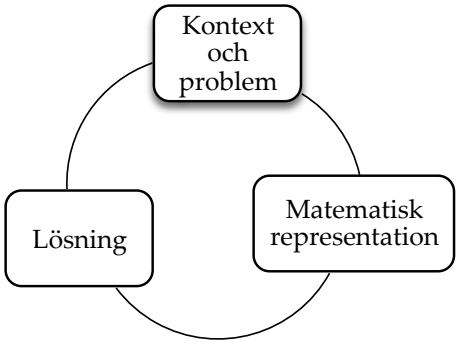
a) Vilken är frysboxens temperatur då den varit avstängd två timmar?

b) Hur länge har frysboxen varit avstängd då temperaturen är 0 °C?

c) Förklara med egna ord vad formeln innebär.

*Figur 3.1. Algebraisk problemlösningsuppgift till gymnasieelever* (Skolverket, 2005, s. 4)

För att analysera elevernas gruppdiskussioner användes två analysverktyg, dels modelleringscykeln och dels Duvals teori (2006). I det första analysstegeget delades problemlösningsuppgiften in i tre kategorier, en för var och en av de tre transformationerna, utifrån modelleringscykeln:




*Figur 3.2,* Matematisk modelleringscykel (baserad på Kehle & Lester, 2003, s. 98).

Kategori 1, från problemtexten till matematisk representation.

Kategori 2, från matematisk representation till lösning.

Kategori 3, från lösning till att besvara frågeställningarna i problemtexten.

Därefter analyserades var och en av de tre kategorierna beträffande elevernas diskussioner med hjälp av Duvals teori.

Analysen av data från delstudie 2, från de fem grupper av årskurs 8-elever som deltog, startade efter att gruppdiskussionerna av en problemlösningsuppgift (En taxiresa, se figur 3.3) hade transkriberats.

En taxiresa beräknades med uttrycket 30 + 8x där x är antalet kilometer.

a) Michelle fick betala 150 kr för en resa. Hur lång var den resan?

Rita ett diagram

b) Vad betyder talen 30 och 8?

*Figur 3.3.* Algebraisk problemlösningsuppgift till årskurs 8-elever

Först delades uppgiften upp i tre steg, en för var och en av de tre transformationerna som finns i uppgiften (Duval, 2006).

De tre transformationerna som finns i uppgifterna från de båda delstudierna är:

*Transformationen mellan naturliga språk och algebraisk representation – conversion*. Transformationen inbegriper att först måste beslut tas om vad i problemtexten som ska förbises och vad som inkluderas i modelleringen av problemet. Denna kategori beskriver transformationen mellan två semiotiska system från problemtexten i naturligt språk till ekvationen där det algebraiska uttrycket i texten till gymnasieeleverna ska vara lika med 0°C, frysboxens temperatur då den varit avstängd en tid, och där det algebraiska uttrycket i texten till högstadieeleverna ska vara lika med kostnaden för taxiresan.

*Transformationen inom algebraiska representationen – treatment*. Transformationen inbegriper ekvationslösning. Kategorin beskriver transformationen inom ett semiotiskt system.

*Transformationen mellan algebraisk representation och naturligt språk – conversion*. Transformationen inbegriper att ekvationens lösning ska tolkas i förhållande till problemet i uppgiften. Kategorin beskriver transformationen mellan två semiotiska system från den algebraiska lösningen till det naturliga språket.

Fokus för analysen av transformationerna var att identifiera och karaktärisera hindren i elevernas lösningsprocess och hur de kommer förbi dessa hinder. Analysen inleddes med att varje kategori i modelleringscykeln analyserades med hjälp av Duvals teori. Första steget i analysprocessen var att avgöra om det var en *treatment* eller en *conversion*. Om det var en transformation inom samma register som då de löste ekvationen så var det en treatment. Om det var en transformation där de var tvungna att byta register som då de tolkade ekvationslösningen för att kunna besvara uppgiftens frågeställning så var det en conversion. Om det var en conversion så analyserades om den var konvergent eller icke-konvergent. Då de kunde transformera tecken för tecken så var det en kongruent conversion medan transformationen av $8x$ var en icke-kongruent conversion på grund av det osynliga multiplikationstecknet.

Genom analyserna av transformationerna eleverna gjorde i uppgiftslösningen kan den första övergripande frågan om vilka hinder för eleverna som kunde identifieras när de löser uppgifter besvaras. Elevernas diskussioner ger möjlighet att också besvara den andra av kappans övergripande frågeställningar om att identifiera hur de kom förbi de hinder de stötte på.

### 3.3.2 Analys i delstudie 3 – Lärares frågor i relation till algebrasvårigheter

I denna delstudie deltog 7 lärare och 10 klasser från högstadiet och gymnasiet. Data i denna studie består av ungefär 7 timmars helklassgenomgångar. Genomgångarna behandlade algebra, antingen var det repetition innan examination eller vid introduktionen av något moment inom algebra. Datamaterialet består av transkriptioner från videoinspelningarna av genomgångarna. Analysen fokuserar på lärares frågor med avseende på vilken algebrasvårighet som berördes, om det var öppna eller slutna frågor samt om det var lägre eller högre nivå-frågor (Bloom, 1956).

*Beskrivning av analysmodellen*. För att analysera detta konstruerade jag en modell för att kategorisera lärarnas frågor.

*Tabell 3.3*. Frågemodell

| Lärarnas frågor | Sluten fråga | Öppen fråga |
|---|---|---|
| Lägre nivåfråga | A | B |
| Högre nivåfråga | C | D |

Modellen (tabell 3.3) är uppdelad i öppna eller slutna frågor samt lägre eller högre nivåfrågor.

För att bedöma om en fråga är lägre eller högre nivåfråga använde jag Blooms taxonomi (1956). Denna taxonomi används flitigt i många forskningssammanhang, den är allmän och ger en tydlig uppdelning av nivån på frågorna. Detta ger därför en bra överblick över frågorna.

Blooms taxonomi (1956), innehåller 6 olika nivåer från lägre (1) till högre (6).

Nivå 1 – Faktakunskap – Handlar om vad eleven redan vet eller borde kunna.

Nivå 2 – Förståelse – Handlar om att visa förståelse för något och använda det i nya sammanhang.

Nivå 3 – Tillämpning – Handlar om att identifiera relevant information eller lösa en uppgift.

Nivå 4 – Analys – Handlar om att eleven måste visa förståelse för strukturer.

Nivå 5 – Syntes – Handlar om att kunna sammanställa nya mönster och strukturer.

Nivå 6 – Värdering – handlar om att bedöma nya idéer eller lösningar.

De tre lägre nivåerna (1–3) faktakunskap, förståelse och tillämpning är kategorin *lägre nivå* och de andra tre nivåerna (4–6) analys, syntes och värdering är kategorin *högre nivå.* Nivåerna har slagits ihop för att få ett hanterbart antal kategorier vilket gör resultatet mer överskådligt.

Kategorierna öppen eller sluten fråga användes på följande sätt. En öppen fråga är en fråga som kan ha många svar och läraren är öppen för alla dessa svar. Detta ses som motsats till den slutna frågan som är en mer styrd fråga där läraren förväntar sig ett visst svar (Mason, 2002).

*Kategorisering och analys.* Fokus för analysen var lärarnas frågor. Syftet med studien var att undersöka vad som karaktäriserar lärares frågor beträffande algebrasvårigheter. Analysen började med att alla frågor lärarna ställde markerades i transkriptet och blev enheter för analysen. Först kategoriserades frågorna utifrån vilken algebrasvårighet som behandlades. Frågor som inte behandlade någon av algebrasvårigheterna (se 2.2) kategoriserades i kategorin frågor relaterade till algebra. Dessa frågor kunde till exempel handla om prioriteringsreglerna eller andra räkneregler. Frågor som inte behandlade algebra eller var relaterade till algebra kategoriserades inte. Efter det analyserades om frågan var öppen eller sluten och slutligen analyserades frågorna i relation till Blooms taxonomi. Om frågan var på nivå 1 till 3 kategoriserades den som lägre nivåfråga och frågan var på nivå 4 till 6 så kategoriserades den som högre nivåfråga.

Genom analyser av lärarnas frågor kan en av avhandlingens övergripande frågeställningar besvaras, om vilka utmaningar för lärarna som kan identifieras när de behandlar algebrasvårigheter i undervisningen.

### 3.3.3 Analys i delstudie 4 – Lärarstudenter diskuterar och bedömer algebrasvårigheter

I denna delstudie deltog 16 lärarstudenter. Data består av gruppdiskussioner med 6 lärarstudentgrupper då de bedömde 5 olika elevlösningar av samma uppgift där lösningarna avser olika lösningsstrategier.

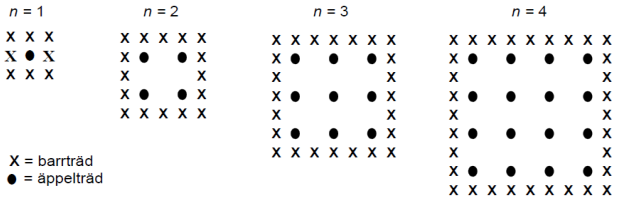
För att bedöma elevlösningarna fick de använda en generell analytisk bedömningsmatris. Fokus för delstudien var att undersöka dels effekterna av den generella analytiska bedömningsmatrisen men detta ligger utanför avhandlingens syfte så analysen av den frågan kommer inte att presenteras här (men finns beskrivet i artikel 4). Den andra forskningsfrågan i denna delstudie handlar om hur specifika algebrasvårigheter diskuteras då elevlösningar bedöms. Detta ger en möjlighet att fördjupa förståelsen för avhandlingens

övergripande frågeställning om vilka utmaningar för lärare som kan identifieras när de behandlar algebrasvårigheter i undervisningssituationer.

Analysen startade efter att inspelningarna av lärarstudenternas gruppdiskussioner och deras bedömningar av elevlösningarna transkriberats. Uppgiften, Äpplen, (figur 3.4) som eleverna fått handlade om en äppelodlare och är en frisläppt PISA-uppgift (OECD, 2006).

En odlare planterar äppelträd i ett kvadratiskt mönster. För att skydda träden mot vinden planterar han barrträd runt hela fruktträdgården.

Figuren nedan visar placeringen av äppel- och barrträd på olika rader ($n$) äppelträd:




**Fråga 1** Gör färdigt tabellen

| $n$ | Antal äppelträd | Antal barrträd |
|---|---|---|
| **1** | **1** | **8** |
| **2** | **4** | |
| **3** | | |
| **4** | | |
| **5** | | |

**Fråga 2** Det finns två formler du kan använda för att beräkna antalet äppelträd och antalet barrträd i de ovan beskrivna figurerna:

Antal äppelträd = $n^2$

Antal barrträd = $8n$

där $n$ är antalet rader av äppelträd.

Det finns ett $n$-värde, där antalet äppelträd är detsamma som antalet barrträd. Ta reda på detta $n$-värde och visa din metod för att beräkna det.

**Fråga 3** Antag att odlaren vill göra en mycket större fruktträdgård med många rader av träd. Då odlaren gör fruktträdgården större, vad kommer då att öka snabbast: antalet äppelträd eller antalet barrträd? Visa hur du kommer fram till ditt svar.

*Figur 3.4. Uppgiften Äpple handlar om en odlare som planterar äppelträd i ett kvadratiskt mönster. Uppgiften behandlar mönster, generalisering och består av tre deluppgifter* (OECD, 2006).

Algebrasvårigheterna i denna uppgift är *mönster* i fråga 1, *ekvationslösning* i fråga 2 och *algebraisk problemlösning* i fråga 3. I transkripten markerades vilken deluppgift som de diskuterade och då diskussionen handlade om någon av dessa tre nämnda algebrasvårigheter markerades detta för att analyseras vidare. De markerade segmenten analyserades utifrån hur de diskuterade algebrasvårigheten och kategorier skapades om vad diskussionen handlade om.

## 3.4 Etiska överväganden

Insamling av empirin har genomförts i enlighet med Vetenskapsrådets forskningsetiska riktlinjer (Vetenskapsrådet, 2011). Deltagarna informerades om projektet. Informationen lämnades skriftligt och deltagarna undertecknade om de vill delta eller inte. I de fall då deltagarna var yngre än 15 år informerades även deras vårdnadshavare om projektet samt för att ge sitt samtycke. Deltagarna kunde välja om de bara ville delta via ljudinspelning eller via videoinspelning eller både och. Detta var viktigt eftersom det kunde vara av intresse att använda en viss videosekvens i vetenskapligt syfte. I de fall då deltagaren inte ville bli filmade har de placerats i klassrummet så att detta har kunnat undvikas. För att undvika att någon av deltagarna ska kunna identifieras har varje deltagare fått pseudonymer. Samma pseudonym följer var och en i alla transskript i de fall då deltagaren deltar i flera delstudier.

För att undvika otillbörlig inverkan på resultaten och fortfarande vara informativt var det viktigt att ge rätt information om respektive delstudie. Deltagarna delgavs att intresset för studien var i delstudie 1 och 2 hur eleverna resonerade om det matematiska innehållet i algebraiska problemlösningsuppgifter samt hur de löser problemen. I delstudie 3 delgavs de att intresset för studien var hur man kommunicerade algebra under klassgenomgångar och i delstudie 4 delgavs lärarstudenterna att intresset var hur de diskuterade elevlösningar och bedömde dem.

Ingen information delgavs om att algebrasvårigheter var det specifika intresset. Om deltagarna var införstådda om att det var ett specifikt innehåll i deras diskussioner och lärarnas frågor som var i fokus kunde det påverka hur de pratade och om vad. I detta projekt var det viktigt att fånga om vad och hur de pratar så naturligt som möjligt.

Deltagarna i delstudie 1 och 2 fick veta att för forskningen var någon bedömning av deltagarnas enskilda kunskaper inte av intresse eftersom delstudiernas fokus var deras resonemang. Denna information var viktig att ge

eftersom deras svårigheter, misstag och diskussion kring dessa var av stort intresse för forskningen. Det enda som skulle analyseras var deltagarnas diskussioner av algebrasvårigheter i uppgifterna. Detta innebar att deltagarnas förklaringar vid det speciella tillfället analyserades, inte eleverna fullständiga matematiska förståelse.

### 3.4.1 Forskaretik

Forskarens roll i en studie är en etisk fråga (Kvale, 2009). Det är viktigt för forskaren att inte störa utan hålla sig så anonym som möjligt i klassrummet. Under gruppdiskussionerna var min roll att påminna eleverna om att prata högt, förklara om de hade fastnat och vid behov ställa relevanta frågor.

Avsikten var att hålla situationerna i klassrummet och gruppdiskussionen så naturliga som möjligt men med videokameran och ljudspelaren blev eleverna naturligtvis störda. Deras fokus var inte alltid på matematiskt innehåll. Detta var dock endast ett problem i början av lektionen eller gruppdiskussionen. Efter ett tag glömde både elever och lärare både mig och kameran.

# 4. Resultat

*I föreliggande kapitel kommer delstudiernas resultat att presenteras. Först presenteras resultaten från delstudierna med elevers gruppdiskussioner för att ge en bild av algebrasvårigheterna sett ur elevperspektiv. Därefter beskrivs algebrasvårigheter sett ur ett lärarperspektiv genom två olika infallsvinklar. Först med fokus på vilka frågor lärarna ställer under helklassgenomgångar i förhållande till respektive algebrasvårighet. Därefter med fokus på hur lärarstudenterna diskuterar och bedömer algebrasvårigheter i elevlösningar.*

## 4.1 Elevperspektiv på algebrasvårigheter

Här beskrivs resultatet från de två studierna med elever som diskuterar algebraiska problemlösningsuppgifter i smågrupper. Den första studien behandlar 32 gruppdiskussioner med gymnasieelever från årskurs 1 och den andra studien behandlar 5 grupper med årskurs 8-elever. Resultatet från de empiriska analyserna av elevernas gruppdiskussioner av problemlösningsuppgifterna kommer göra det möjligt att besvara avhandlingens övergripande frågeställningar angående eleverna; om vilka hinder för elever som kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas i lärandesituationer samt hur de kommer förbi dessa hinder.

Resultatet är strukturerat baserat på de tre transformationerna som förekommer i uppgiften[4] och kommer att presenteras genom några exempel från de olika transformationerna. I den första delstudien med gymnasieeleverna används en modelleringscykel och transformationerna mellan de olika faserna analyseras med hjälp av Duvals teori. I den andra delstudien med årskurs 8-elever används enbart Duvals teori för att analysera transformationerna mellan de olika representationerna i problemlösningen. Transformationerna i de båda delstudierna är dock de samma.

### 4.1.1 Transformationer i elevuppgifterna

I de båda delstudiernas uppgifter finns ett algebraiskt uttryck som beskriver problemsituationen men eleverna måste tolka problemet för att förstå uttrycket. Detta är en transformation från vårt naturliga språk till algebraisk

[4] Uppgiften (Frysboxen) till gymnasieeleverna handlar om temperaturen i en frysbox och uppgiften (Taxiresan) till årskurs 8-eleverna handlar om längden på en taxiresa. Dessa uppgifter presenteras i avsnitt 3.3.1

skrift. I Duvals termer är denna transformation en conversion i och med att de måste byta register. Därefter ska eleverna lösa den tecknade ekvationen. Denna transformation är inom samma register och är alltså en treatment. I nästa steg ska eleverna tolka svaret och besvara frågan. Denna transformation är från algebraisk skrift tillbaka till vårt naturliga språk. Transformation är alltså en conversion då de måste byta register igen.

### 4.1.2 Summering av resultaten från elevdiskussionerna

I detta avsnitt ges en summering av resultaten från alla elevgruppsdiskussioner, tillsammans med exempel, för vardera av de förekommande transformationerna.

*Transformationen mellan naturliga språk och algebraiska representationen*

I båda delstudierna börjar eleverna att tolka det algebraiska uttrycket som givets i respektive uppgift och i båda delstudierna fastnar i stort sett alla elever på samma hinder, betydelsen av $x$. I uppgifterna är $x$ definierat som antal °C/h (frysboxen) och kr/km (taxiresan) men i båda delstudierna tolkar de flesta eleverna det som att $x$ står för timmar respektive km. De tolkar $x$ som en enhet. Följande exempel är från en gymnasiegrupp som visar på detta hinder.

| | | |
|---|---|---|
| 1.1 | Lollo | $y$ är grader |
| 1.2 | Johan | Va är inte $y$ timmar? |
| 1.3 | Chris | Nä $y$ är grader och $x$ är timmar |
| 1.4 | Johan | Ja … |
| 1.5 | Lollo | Så frysboxen har varit avstängd i $x$ timmar |
| 1.6 | Per | Det är typ en femtedel |
| 1.7 | Johan | Ja en femtedel, det är fem, sex minuter … Nä tolv minuter. |
| 1.8 | Per | Ja det är rätt … nu tänkte jag helt fel |
| 1.9 | Johan | Oh tolv minuter minus arton, det är um … minus … |

I detta fall är det svårt att avgöra hur Lollo och Chris tolkar $x$ och $y$ [1.1, 1.3] men av Lollos nästa uttalade [1.5] där hon säger ”Så frysboxen har varit avstängd i $x$ timmar” tyder på att hon tolkar $x$ på samma sätt som Johan gör när han säger ”Ja en femtedel, det är fem, sex minuter … Nä tolv minuter” [1.7] att $x$ står för enheten, ”timmar” ($0{,}2x \leftrightarrow 0{,}2$ timmar) istället för $0{,}2x \leftrightarrow$ 0,2°C/h gånger antalet timmar. Eleverna tolkar *bokstaven som ett objekt* enligt

Küchemanns (1978) kategorisering (se 2.2.1). Årskurs 8-eleverna gör likande tolkning av $x$.

Transformationen här är en conversion från $0{,}2x$ i det diskursiva monofunktionella registret till *0,2 grader per timme gånger antalet timmar* i det diskursiva multifunktionella registret. Tolkningen de gör beror troligtvis på det osynliga multiplikationstecknet i $0{,}2x$. Transformationen är en icke-kongruent conversion beroende på det osynliga multiplikationstecknet. Johan gör dock en kongruent conversion då han tolkar $0{,}2x$ *tecken för tecken* till 0,2 timmar.

Svårigheten eleverna stötte på var alltså det osynliga multiplikationstecknet mellan 0,2 och $x$. De kom förbi svårigheten då de artikulerade multiplikationstecknet gånger med naturligt språk. Detta skedde genom att de frågade varandra frågor om vad $x$ betydde.

*Transformationen inom den algebraiska representationen*

Det största problemet för de flesta elevgrupperna i båda studierna var att teckna ekvationen men när de gjort det använde många proceduren att göra samma sak på båda sidor om likhetstecknet. Några av gymnasieelevgrupperna valde att lösa uppgiften med upprepad addition istället för att teckna en ekvation. De grupper som löste uppgiften med hjälp av en ekvation genomförde det på samma sätt som följande exempel visar. Detta exempel är från en årskurs 8-grupp (frysboxen).

| | | |
|---|---|---|
| 2.1 | Fredrik | Vi börjar med att få $x$ ensamt på ena sidan [skriver $x$] Ja, vi ska också… |
| 2.2 | George | Då har vi bara $x$ på en sida, hehehe |
| 2.3 | Fredrik | Va? |
| 2.4 | George | Ja men du sa ju att vi skulle ha $x$ på bara en sida, men vi har ju bara $x$ på en sida. |
| 2.5 | Fredrik | En sida om ekvationen, …på en sida av likhetstecknet. Då har vi tretti plus åtta $x$ minus tretti [skriver vad han säger] Det är ett hundra tjugo. |

Fredrik säger ”på en sida” [2.1], vilket George repeterar [2.2; 2.4] så Fredrik förtydligar det genom att säga *likhetstecknet* [2.5] för att förklara vilket tecken han refererar till. Det sätt Fredrik refererar till likhetstecknet när de löser ekvationer är väldigt vanligt i båda studierna De kan lösningsproceduren för ekvationer, att göra samma sak på båda sidor om likhetstecknet, även om en del i årskurs 8-grupperna försökte ”lösa” uttrycket $8x + 30$ genom att göra samma sak på båda sidor om additionstecknet. De flesta grupperna visar sig trots allt en viss förståelse för likhetstecknets betydelse. Transformationen i

detta exempel är inom den algebraiska representationen när de tecknar ekvationen och lösningen av ekvationen. Lösningsprocessen är en diskursiv monofunktionell treatment då de inte behöver byta register.

*Transformationen mellan algebraiska representationen och naturligt språk*

I den tredje transformationen ska eleverna tolka svaret vilket visade sig vara en svårighet för många elever även om de löste ekvationen och fick fram ett värde på $x$. Denna svårighet blev märkbar då de skulle besvara frågan i uppgiften. Detta fastnade de flesta grupperna på i båda delstudierna. Följande exempel är från samma årskurs 8-grupp som i förra exemplet. De fick fram att $x = 15$ och ska tolka det för att kunna besvara frågan.

| | | |
|---|---|---|
| 3.1 | Fredrik | Om ett $x$ är femton, då borde åtta $x$ gånger vara hur lång resan var? |
| 3.2 | George | [Räknar på sin telefon] femton gånger åtta … etthundratjugo |
| 3.3 | Ronny | Ja |
| 3.4 | George | Hehe, det var ju precis vad vi just delade. |

Denna tolkning av ekvationslösningen var väldigt vanlig i båda delstudierna. När årskurs 8-eleverna hade lösningen ersatte de $x$ med svaret de just fått och beräknade uttrycket de fått i uppgiften och tolkade det som längden på resan. George kommentar [3.4] noterar inte den övriga gruppen så det är svårt att avgöra om George bara säger det spontant utan att själv reflektera då det bara lämnas utan kommentarer från övriga. Gruppen fortsätter istället att diskutera rimligheten i att resan skulle kunna vara 120 km lång då den bara kostade 150 kr. Orsaken varför de inte svarar 120 beror på att det var alldeles för billigt. De fortsätter att diskutera och efter en lång diskussion läser någon av dem uppgiftstexten och de blir påminda om betydelsen av $x$, att $x$ är antalet kilometer. Gruppens tolkning av lösningen är en conversion då ekvationen $8x + 30 = 150$ är i det diskursiva monofunktionella registret och deras tolkning är i naturligt språk som är i det diskursiva multifunktionella registret.

Svårigheten i denna transformation är tolkningen av lösningen och betydelsen av $x$. De kommer förbi den med hjälp av texten i uppgiften och genom att bedöma rimligheten i svaret. De diskuterar sin lösning men då de läser definitionen av $x$ påminns de om vad $x$ betyder.

## 4.2 Lärarperspektiv på algebrasvårigheter

I detta avsnitt presenteras resultaten från delstudie 3 och 4 var för sig. Fokus är på lärares undervisning och hur de hanterar algebrasvårigheter i klassrummet samt i bedömning.

### 4.2.1 Lärares frågor i matematikklassrum

Den tredje delstudien fokuserar på lärares frågor i relation till algebrasvårigheter under helklassgenomgångar. Resultatet från de empiriska analyserna av helklassgenomgångarna kommer göra det möjligt att besvara avhandlingens tredje övergripande frågeställning angående lärarna; om utmaningar för lärare som kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas i undervisningssituationer. De algebrasvårigheter som studerats är;

- olika betydelser av bokstäver i algebra.
- likhetstecknets betydelse och process-objekt-dualitet.
- ekvationslösningsprocedurer.
- algebraisk problemlösning.

Totalt ställde lärarna 193 frågor som behandlar algebrasvårigheter under de observerade genomgångarna. Resultaten från analysen av frågorna presenteras med hjälp av frågemodellen, en modell för varje algebrasvårighet.

*Tabell 4.1.* Lärarnas frågor i relation till olika betydelser av bokstäver i algebra.

| Lärares frågor | Slutna frågor | Öppna frågor |
|---|---|---|
| Frågor på lägre nivå | 41 | 12 |
| Frågor på högre nivå | 0 | 3 |

Tabell 4.1 visar antalet frågor om algebrasvårigheten olika betydelser av bokstäver i algebra. Nästan alla frågor är på lägre nivå vilket betyder att frågorna handlar om vad eleven redan ska veta eller identifiera relevant information för att lösa uppgiften (Bloom, 1956).

*Tabell 4.2.* Lärares frågor i relation till betydelsen av likhetstecknet och process-objekt-dualitet.

| Lärares frågor | Slutna frågor | Öppna frågor |
|---|---|---|
| Frågor på lägre nivå | 25 | 9 |
| Frågor på högre nivå | 0 | 3 |

Tabell 4.2 visar antalet frågor om algebrasvårigheten likhetstecknets betydelse och process-objekt-dualitet. I denna kategori är 34 frågor på lägre nivå och 3 frågor är på högre nivå. Dessa 3 är också kategoriserade som öppna frågor. Totalt är ungefär en tredjedel av frågorna öppna i denna kategori.

*Tabell 4.3.* Lärares frågor i relation till ekvationslösningsprocedurer.

| Lärares frågor | Slutna frågor | Öppna frågor |
|---|---|---|
| Frågor på lägre nivå | 42 | 19 |
| Frågor på högre nivå | 2 | 2 |

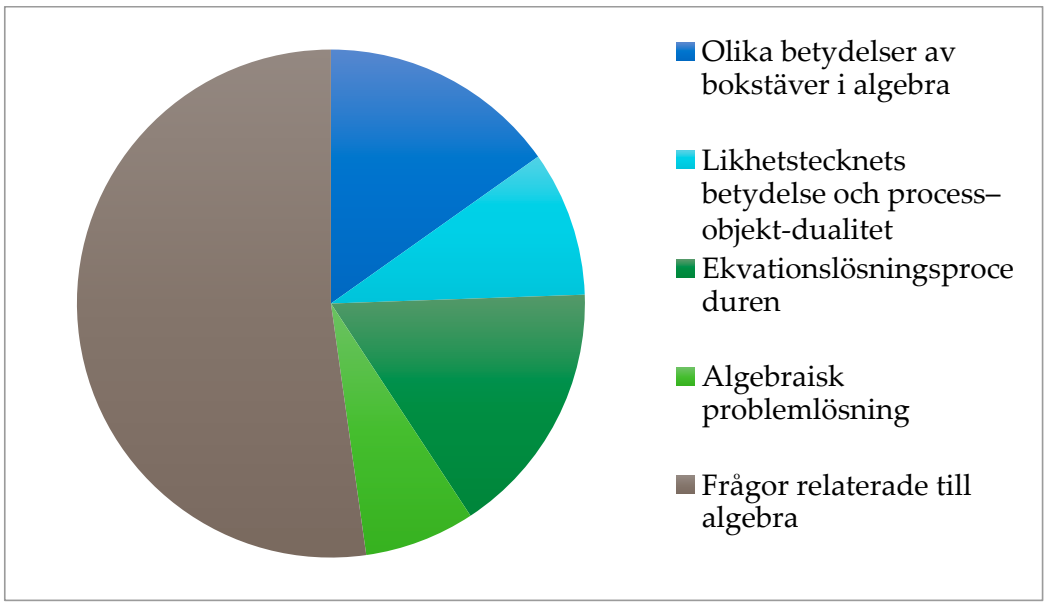
Tabell 4.3 visar antalet frågor i relation till ekvationslösningsprocedurer. De flest frågor är slutna (44 frågor) och 2 av dem är på högre nivå. Ungefär en tredjedel av alla frågor i denna kategori var öppna.

*Tabell 4.4.* Lärares frågor i relation till algebraisk problemlösning.

| Lärares frågor | Slutna frågor | Öppna frågor |
|---|---|---|
| Frågor på lägre nivå | 19 | 13 |
| Frågor på högre nivå | 0 | 3 |

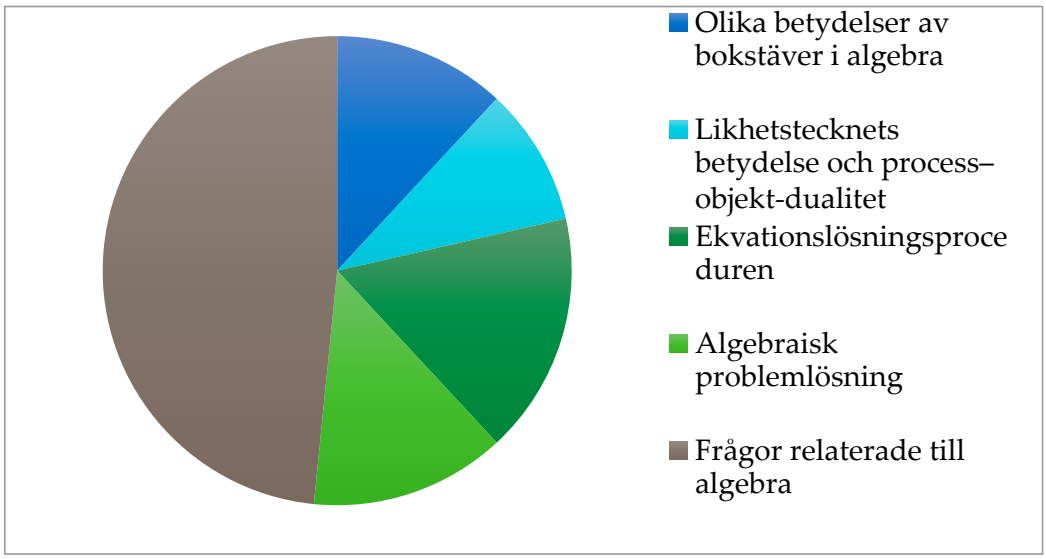
Tabell 4.4 visar antalet frågor i relation till algebrasvårigheten algebraisk problemlösning. De flesta frågorna var slutna (19 frågor). Denna kategori har högsta andelen av öppna frågor, nästan 50 % av alla frågor hamnade i denna kategori.

En summering av resultatet i tabell 4.1–4.4 visar att nästan alla frågor är slutna frågor och på lägre nivå. Av frågorna som kategoriserats som frågor på högre nivå var nästan alla öppna utom två frågor som handlar om betydelsen av likhetstecknet och process-objekt-dualitet. Endast 13 av de 193 frågorna som ställdes var på högre nivå.




*Figur 4.1.* Fördelningen av slutna frågor med avseende på algebrasvårigheter.

Under de observerade genomgångarna ställde lärarna 396 frågor, varav 270 var slutna frågor (figur 4.1) och de flesta var på lägre nivå (tabell 4.1-4.4). Bara två av de slutna frågorna är på högre nivå. Över hälften av frågorna är i kategorin som inte behandlar någon av algebrasvårigheterna utan frågor som relaterar till algebra så som prioriteringsreglerna. Av dem som handlar om algebrasvårigheter är de flesta i kategorierna problemlösning och ekvationslösning (ca 23 % av det totala antal slutna frågorna).




*Figur 4.2* Fördelningen av öppna frågor med avseende på algebrasvårigheter

126 av frågorna är öppna och 11 av dem är på högre nivå (tabell 4.1-4.4), övriga 115 frågor är alltså på lägre nivå (figur 4.2). Av de öppna frågorna är det mindre än hälften som är i kategorin som inte handlar om algebrasvårigheter. Den kategori som behandlar någon av algebrasvårigheterna och som innehåller flest öppna frågor är algebraisk problemlösning och ekvationslösning (ca 30 % av det totala antalet öppna frågor).

### 4.2.2 Exempel på lärares frågor under klassrumsgenomgångar

Målet med lektionen från den genomgång i en årskurs 8-klass som ges i exemplet nedan handlar om algebraiska uttryck. Läraren har precis presenterat en uppgift som handlar om en telefonräkning. De ska beräkna hur mycket det kommer att kosta om man har ringt 1000 minuter med uttrycket $95 + 0{,}67x$. Läraren definierade $x$ som antalet minuter man har ringt innan de börjar lösa uppgiften.

*Exempel: Betydelsen av bokstäver i algebra*

| | | |
|---|---|---|
| 4.1 | Läraren | Kostnaden för telefonräkningen beräknas genom uttrycket $95 + 0{,}67x$ [läraren skriver uttrycket på tavlan] |
| 4.2 | Läraren | Hur mycket ska vi betala om vi har ringt 1000 minuter? Hur ska vi beräkna det? Ella? |
| 4.3 | Ella | Jag vet inte |
| 4.4 | Läraren | Vad betyder det här uttrycket? |
| 4.5 | Ella | Jag tycker sånt är svårt |
| 4.6 | Läraren | Telefonräkningen för en månad kan beräknas med det här uttrycket. Först måste du betala 95 kr bara för att du har telefonen även om du inte har ringt någon. |
| 4.7 | Ella | Okej … |
| 4.8 | Läraren | Vad betyder då noll komma sextiosju? |
| 4.9 | Ella | Okej, då betyder noll komma sextiosju x, noll komma sextiosju minuter. |
| 4.10 | Läraren | Ja du måste betala det för varje minut |
| 4.11 | Ella | Okej |
| 4.12 | Läraren | Om du har ringt totalt 1000 minuter hur mycket ska du betala då? |
| 4.13 | Ella | Det blir sexhundrasjuttio kronor |

| | | |
|---|---|---|
| 4.14 | Läraren | Exakt sexhundra plus … |
| 4.15 | Ella | Sexhundrasjuttio plus nittiofem. Jag viste inte vad noll komma sextiosju betydde. |
| 4.16 | Läraren | Nej, det kan vara lite trixigt men man behöver bara använda formeln. |

När läraren introducerar uppgiften frågar hon två frågor [4.2]. Dessa frågor är kategoriserade som slutna frågor på lägre nivå (A) för att den första frågan har bara ett rätt svar och läraren vill kontrollera att eleverna har förstått vad som ska göras. Ella skulle ha omformulerat informationen till ett nytt sammanhang för att besvara den andra frågan då läraren hade visat hur man gör i ett tidigare exempel. Ella var dock inte säker på svaret [4.3; 4.5] så läraren förklarar betydelsen av konstanten i uttrycket [4.6] och frågar Ella igen om betydelsen av $0{,}67x$ [4.8]. Den frågan är också kategoriserad som en sluten fråga på lägre nivå (A) då den handlar om att definiera relevant information och den har ett korrekt svar. Ella gör då en vanlig tolkning av $x$ [4.9] att $x$ betyder minuter. Elevers svårigheter med betydelsen av bokstäver i algebra och att de tolkar bokstäver som enheter har dokumenterats i tidigare studier (t.ex. Knuth et al., 2005). Varför läraren svarar ”ja” [4.10] går inte säga något om men därefter korrigerar hon Ella med ”du måste betala det för varje minut”. Det betyder troligtvis att hon hörde Ellas svar och vill tydliggöra att kostnaden är 0,67 kronor för varje minut.

Detta är ett exempel när algebrasvårigheten betydelsen av bokstäver i algebra behandlas i undervisningen och läraren ställer frågor. I de flesta fall är frågorna på lägre nivå och i de flesta fall också slutna i relation till denna algebrasvårighet. Ellas missuppfattning av betydelsen av $x$ kan ha påverkat läraren i hennes val att ställa frågor på lägre nivå då eleverna kanske inte kan besvara frågor på högre nivå.

### 4.2.3 Bedömning av algebrasvårigheter

Den fjärde delstudien fokuserar på lärarstudenters bedömning av algebrasvårigheter i lösningar från en algebraisk problemlösningsuppgift. I studien medverkar 6 grupper med 2–3 lärarstudenter/grupp. De diskuterade och bedömde fem elevlösningar.

Resultatet från hur algebrasvårigheter diskuteras och bedöms kommer vara ett bidrag till att besvara en av de övergripande frågeställningarna om vilka utmaningar för lärarna som kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas i undervisningssituationer.

Den algebraiska problemlösningsuppgift (se 3.3.3) som eleverna löst innehöll 3 deluppgifter. Den första deluppgiften handlar om mönster. Eleverna ska fylla i en tabell baserat på ett mönster. Den andra deluppgiften handlar om att lösa en ekvation. Slutligen, den tredje deluppgiften är problemlösning där de ska förklara hur mönstret utvecklas. Varje lärarstudentgrupp fick fem elevlösningar att bedöma vilket ger att alla grupper genomförde 15 bedömningar vardera. I studien ingick alltså totalt 90 bedömningar (fem elevlösningar * tre deluppgifter * sex studentgrupper). Elevlösning 1 oh 2 innehöll brister och var felaktig medan de övriga tre elevlösningarna (3, 4 och 5) var mer eller mindre korrekta (tabell 4.5). I de tre fall då lösningarna var korrekta diskuterades inte det algebraiska innehållet, utom i ett fall (5.1). Lärarstudenterna bedömde dessa lösningar enbart med argument från den generella bedömningsmatrisen (se bilaga).

*Tabell 4.5.* Resultatet av de sex lärarstudentgruppernas bedömning av fem elevlösningar

| Elevlösning: deluppgift | Antal grupper som bedömer en specifik algebrasvårighet |
|---|---|
| 1:1 | Mönster: 3 grupper |
| 1:2 | Ekvationslösning: 4 grupper |
| 1:3 | Algebraisk problemlösning: 2 grupper |
| 2:1 | |
| 2:2 | Ekvationslösning: 2 grupper |
| 2:3 | Algebraisk problemlösning: 1 grupp |
| 3:1 | |
| 3:2 | |
| 3:3 | |
| 4:1 | |
| 4:2 | |
| 4:3 | |
| 5:1 | Mönster: 1 grupp |
| 5:2 | |
| 5:3 | |

I de två elevlösningar som innehöll brister eller var felaktig diskuterades algebrasvårigheter i 12 deluppgifter av de totalt 30 deluppgifterna som dessa två elevlösningar genererade. I en korrekt lösning diskuterades även algebrasvårigheten mönster (5:1). De totalt 13 bedömningarna av algebra-

svårigheter kategoriserades och tre olika kategorier gick att identifiera utifrån lärarstudenternas diskussioner (tabell 4.6). De tre kategorier var *tolkning, generella kommentarer* och *specifika kommentarer*. *Tolkning* var när de diskuterade elevens lösning för att förstå vad eleven hade gjort och varför den gjort så. I kategorin *specifika kommentarer* handlade det om att lärarstudenterna uttryckte sina åsikter om elevlösningen och i kategorin *generella kommentarer* handlade det om att lärarstudenterna uttryckte enbart generella åsikter utan att prata om något speciellt i elevlösningen.

*Tabell 4.6* Antal bedömningar i varje kategori av algebrasvårigheter i elevlösningarna.

| Kategori | Antal |
|---|---|
| Tolkning | 7 |
| Specifika kommentarer | 3 |
| Generella kommentarer | 3 |

I de sju fall i kategorin tolkning försökte lärarstudenterna tolka lösningen och diskuterade vad eleven hade gjort innan de bedömde med hjälp av matrisen. I de tre fallen de gjorde specifika kommentarer handlade det om att de kommenterade det matematiska innehållet i lösningen utan att diskutera felet. Kommentaren handlade enbart om att det var fel. I de tre övriga fallen i kategorin generella kommentarer sa de bara något generellt om lösningen, till exempel *här blev det fel*. Därefter diskuterade de på vilken nivå lösningen skulle placeras i matrisen.

Då lärarstudenterna diskuterade algebrasvårigheten mönster i första deluppgiften handlade diskussionen om hur eleven hade förstått begreppet mönster eller hur eleven fyllt i tabellen. I den andra deluppgiften då algebrasvårigheten var ekvationslösning av $n^2 = 8n$ handlade diskussionen om hur de använt en lämplig procedur. I den tredje deluppgiften, då algebrasvårigheten var algebraisk problemlösning, om att avgöra vilka träd som till antalet ökade snabbast om trädgården blev större, handlade diskussionerna till en del om det matematiska innehållet i elevlösningen. Det var främst då det fanns brister i lösningen, elevlösning 1 och 2. Däremot då lärarstudenterna diskuterade elevlösningarna 3-5 bedömde de bara lösningen som korrekt eller använde bara matrisen för att göra sina bedömningar. I följande avsnitt ges ett exempel på hur de diskuterade algebrasvårigheten problemlösning.

### 4.2.4 Exempel på lärarstudenternas gruppdiskussioner om bedömning av algebrasvårigheter

I den tredje deluppgiften var algebrasvårigheten problemlösning och följande exempel visar på hur lärarstudenterna diskuterade detta.

Den aktuella elevlösningen har korrekt svar men motiveringen är otillräcklig. Den specifika algebrasvårigheten är problemlösning och lärarstudenternas diskussion är placerad i kategorin *tolkning.*

Elevlösning:

> *Antalet äppelträd kommer att öka snabbare för de står på en större area och barrträden är runt omkring dem.*

I lärarstudenternas diskussion av denna lösning diskuterar tre grupper det matematiska innehållet. De övriga tre grupperna baserar sina argument för bedömningen på matrisen (bilaga) eller bedömer den enbart som korrekt. I följande exempel diskuterar denna studentgrupp dock bristerna i motiveringen. Gruppen tolkar lösningen och diskuterar det matematiska innehållet men kommer inte till någon slutsats om orsakerna till bristerna i motiveringen.

| | | |
|---|---|---|
| 5.1 | Maria | De står på en större area, det är ju som … Det är ingen förklaring varför det skulle göra att antalet träd ökar. |
| 5.2 | Pia | Nä … |
| 5.3 | Pia | Hm … Äh, det är nästan en strategi men den är orimlig |
| 5.4 | Maria | Ja |
| 5.5 | Pia | Onödig information. Arean i sig själv har ju inget att göra med det. |
| 5.6 | Maria | Nej, det är på den här nivån [pekar på någon nivå i matrisen] |
| 5.7 | Pia | Ja |
| 5.8 | Maria | Och förklaringen … den är inte tydlig … |
| 5.9 | Pia | Ja |

I detta exempel saknar Maria förklaringen om varför äppelträden växer snabbare än barrträden [5.1]. Hon konstaterar att påståendet ”de står på en större area” inte är tillräckligt. Pia håller med och anser att det är onödig

information för arean har inget att göra med ökningen av antal träd [5.5]. De diskuterar dock inte algebrasvårigheten mer utförligt, avseende problemlösning, utan vänder sig till matrisen och baserar sin bedömning på matrisens text.

Denna diskussion är ett exempel på en gruppdiskussion om en algebrasvårighet. Generellt sett så diskuterade lärarstudenterna inte algebrasvårigheterna mer utförligt. De diskuterade till exempel inte orsakerna till de felaktiga svaren eller inte problematik med de specifika algebrasvårigheterna.

# 5. Slutsatser och diskussion

*I detta avsnitt diskuteras resultaten från de fyra delstudierna i relation till avhandlingens syfte och forskningsfrågor. Det betyder att jag kommer att diskutera resultaten utifrån ett elevperspektiv och resultaten utifrån ett lärarperspektiv. Inledningsvis kommer avhandlingens forskningsfrågor diskuteras tillsammans med en sammanfattning av resultaten från elevstudierna (delstudie 1 och 2). Därefter diskuteras forskningsfrågorna tillsammans med en sammanfattning från resultaten från lärarstudierna (delstudie 3 och 4). Slutligen diskuteras resultaten utifrån både elev- och lärarperspektiv och på så sätt besvaras kappans övergripande frågeställningar.*

I denna avhandling behandlas undervisning och lärande om algebra i grundskolans senare år och gymnasieskolans första år. Avhandlingens syfte har varit att fördjupa förståelsen för algebrasvårigheter sett ur elevperspektiv så väl som lärarperspektiv. I lärandesituationerna fokuserades på vilka hinder elever stötte på när de diskuterar algebraiska problemlösningsuppgifter och hur de kom förbi dessa hinder. I undervisningssituationer fokuserades dels på frågor lärare ställer i relation till specifika algebrasvårigheter och dels på hur specifika algebrasvårigheter bedöms av lärarstudenter.

## 5.1 Hinder för elever i lärandesituationer

Avhandlingens första frågeställning handlar om vilka hinder för eleverna som kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas. För att besvara denna fråga genomfördes två delstudier. I delstudie 1 undersöktes när gymnasieelever från årskurs 1 löste och diskuterade en algebraisk problemlösningsuppgift. I delstudien 2 undersöktes när elever ur årskurs 8 löste en annan problemlösningsuppgift. I båda studierna användes Duvals (2006) teori om transformationer mellan semiotiska representationer. I den första studien användes även modelleringscykeln och transformationerna mellan tre olika representationsformer analyserades. I den andra studien analyserades först vilka transformationer som fanns i uppgiften. I analyserna av elevernas lösningsdiskussioner kunde tre transformationer identifieras i båda studierna:

1. Transformation mellan naturligt språk och algebraisk representation.
2. Transformationen inom algebraisk representation.
3. Transformationen mellan algebraisk representation och naturligt språk.

### 5.1.1 Transformationen mellan naturligt språk och algebraisk representation

I transformationen mellan tolkningen av problemet (naturligt språk) till ekvationen (algebraiska representationen) mötte eleverna på flera hinder.

*Betydelsen av x och det osynliga multiplikationstecknet.* Eleverna hade problem att tolka betydelsen av $x$. De tolkade $x$ som en enhet till exempel kilometer eller timmar något som tidigare studier också har visat på (t.ex. Knuth et al., 2005). En möjlig orsak till varför de istället för att göra den korrekta tolkningen av $x$, som antal km eller antal timmar, är det osynliga multiplikationstecknet. Det fanns inget i uppgiften som påvisade att koefficienten framför $x$ beskrev en förändringshastighet. En korrekt tolkning av det innebär att man tolkar $8x$ som ett linjärt samband och att parametrarnas relation till varandra beror av det osynliga multiplikationstecknet. Det var underförstått i uppgiften. Liknande har visats i tidigare studier (t.ex. Kirschner, 2001).

Eleverna i årskurs 8 har just påbörjat sina formella algebrastudier medan gymnasieeleverna har två år mer av den formella algebran. Det är dock anmärkningsvärt att dessa hinder med betydelsen av $x$ och det osynliga multiplikationstecknet fortfarande är hinder för gymnasieeleverna.

*Det algebraiska uttrycket behandlas som en ekvation.* En del årskurs 8-elever försökte även innan de tecknat ekvationen lösa det algebraiska uttrycket som att det var en ekvation och använde samma metod för att lösa uttrycket. De gjorde samma sak på båda sidor men inte båda sidor om likhetstecknet då de inte hade någon ekvation utan på båda sidor om räkneoperationstecknet. Ursini och Trigueros (2004) visade liknande i sin forskning att matematisk symbolism är starkt sammankopplat med matematisk förståelse. Det är svårt att komma vidare om man inte förstår tecknens betydelse. Dessa elever hade lärt sig en procedur, ”att göra samma sak på båda sidor” men inte förstått att vilket tecken som detta gällde. Detta hinder var enbart ett problem för eleverna i årskurs 8.

### 5.1.2 Transformationen inom algebraisk representation

*Ekvationslösning.* Denna transformation klarade de flesta eleverna från både gymnasiet och högstadiet. En del löste dock problemet utan att konstruera ekvationen. Då problemet var formulerat så att de kunde lösa det med upprepad addition så gjorde en del det.

Högstadieeleverna har nyligen lärt sig proceduren för att lösa ekvationer och dessa elever som försökte lösa uttrycket har en viss förståelse för själva proceduren. Att gymnasieeleverna inte använde proceduren att göra samma

sak på båda sidor om likhetstecknet i större utsträckning var överraskande. Det kan också visa på att de har flera strategier att lösa ekvationer och väljer den mest lämpliga för det problem de ska lösa. Det kan tolkas som att de i alla fall är i början av att utveckla flexibel kunskap (Star & Rittle-Johnson, 2008). Upprepad addition och prövning är också lämpliga metoder för vissa problem även om det är metoder de inte kan lösa alla problem med. Då de använder dessa metoder är det oklart om de har förståelsen för likhetstecknet och vikten av att bibehålla likheten genom hela ekvationslösningsproceduren (Arcavi et al., 2017).

### 5.1.3 Transformationen mellan algebraisk representation och naturligt språk

*Betydelsen av x vid tolkning av svaret.* Transformationen mellan ekvationslösningen och tolkningen av svaret, dvs. från algebraisk representation till det naturliga språket var problematisk för eleverna i båda delstudierna. När de löst uppgiften och hade ett numeriskt svar på vad $x$ var hade de svårigheter att tolka svaret. De har lösningen men eftersom de tolkar $x$ som km eller timmar ser de inte att det numeriska värdet de fått i lösningen är deras svar. Orsaken till detta är troligtvis det osynliga multiplikationstecknet (Knuth et al., 2005)

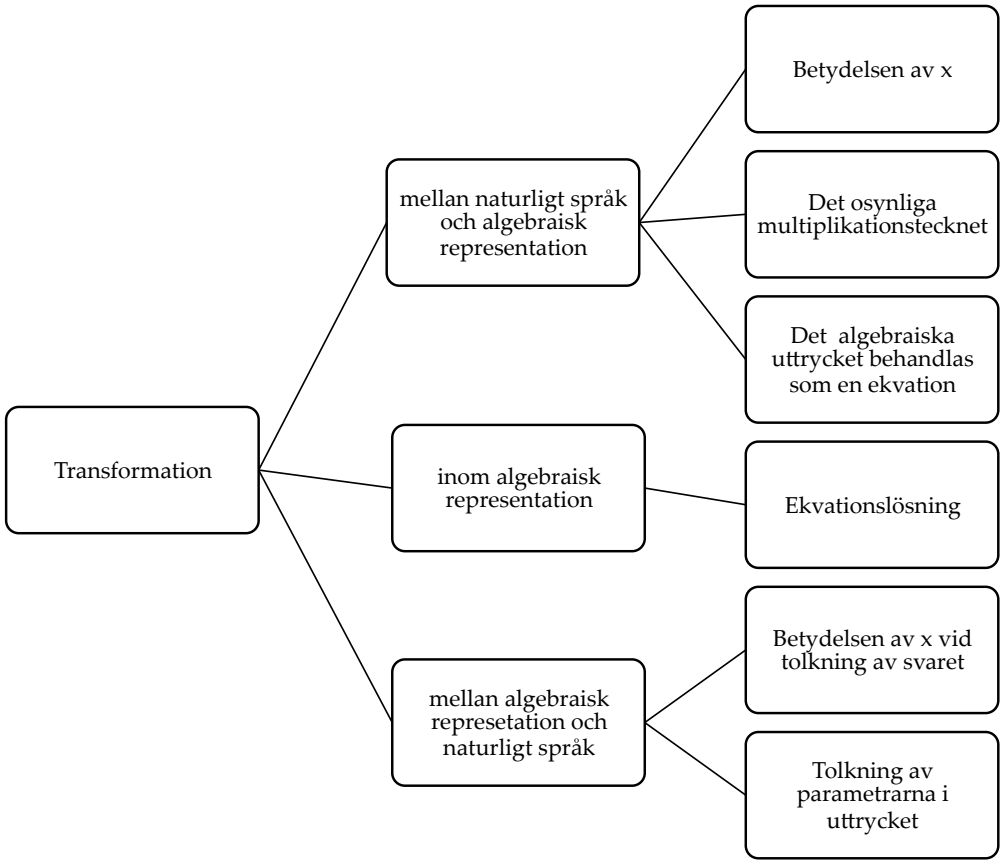
*Tolkning av parametrarna i uttrycket.* Då de skulle förklara betydelsen av koefficienten framför $x$, förändringshastigheten, och konstanten i uttrycket fick de problem. Eleverna fastnade i och med att de inte förstod uppgiftens kontext vilket kan ha påverkat att de hade problem med att tolka parametrarna.

Gymnasieeleverna och högstadieeleverna hade likartade problem med denna transformation. Även i denna transformation, såsom i transformationen från naturligt språk till algebraisk representation (5.1.1), då de måste byta representationssystem uppstår likartade hinder för både gymnasie- och högstadieeleverna.

### 5.1.4 Summering av hinder för elever i lärandesituationer

Genom att studera transformationer mellan olika matematiska representationsformer ges möjlighet att besvara den första forskningsfrågan, om vilka hinder för eleverna som kan observeras i lärandesituationer. Som beskrivits i kapitel 2 så vet vi genom tidigare forskning en hel del om vad som är problematiskt i lärandet av algebra. Duvals teori om transformationer mellan olika representationsformer som använts i denna studie gör det möjligt att

förklara var det är problematiskt för eleverna. Figur 5.1 visar en sammanställning av de observerade hindren avseende olika transformationer.




*Figur 5.1.* Sammanställning av observerade hinder i de olika transformationerna i elevernas uppgiftslösning.

Det är framförallt i transformationer mellan det naturliga språket och den algebraiska representationen som hindren uppkommer då de måste byta register vilket går i linje med vad Duval (2006) visade. Eleverna från både gymnasiet och högstadiet visar tydliga tecken på att de har svårt att tolka algebraiska uttryck och variabler. Procedurer att lösa ekvationer är de mer förtrogna med även om gymnasieeleverna använder fler metoder såsom upprepad addition. Däremot i transformationen mellan algebraisk representation och naturligt språk uppkommer återigen hinder för både gymnasie- och högstadieeleverna då de ska tolka sina lösningar för att besvara frågan i uppgiften. Orsakerna till dessa hinder är till stor del deras tolkning av $x$ att $x$ står för enheten och det osynliga multiplikationstecknet spelar en avgörande roll i denna tolkning. För den fördjupade förståelsen som krävs för elevernas fortsatta studier så behöver de träna på mer än bara procedurer. Att t.ex.

explicit uttala det osynliga multiplikationstecknet, där $8x$ uttalas åtta multiplicerat med $x$ eller åtta gånger $x$, istället för åtta $x$. Speciellt då algebra introduceras, kan vara ett steg i rätt riktning för att eleverna ska få en fördjupad förståelse.

## 5.2 Orsaker till att eleverna kommer förbi hinder i lärandesituationer

Avhandlingens andra frågeställning handlar om hur eleverna kommer för de hinder de stöter på. I sammanställningen i figur 5.1 visas de hinder eleverna stöter på avseende de olika transformationerna. Orsakerna kommer att diskuteras utifrån var och en av de tre transformationerna och i relation till de hinder som observerades och presenterades i 5.1.

### 5.2.1 Transformationen mellan naturligt språk och algebraisk representation

*Betydelsen av x och det osynliga multiplikationstecknet*. Orsaken till att eleverna kom förbi dessa hinder var att de började diskutera och ställa undersökande frågor till varandra. En annan orsak var att de uttalade det algebraiska uttryckets betydelse i naturligt språk. De var osäkra på betydelsen av koefficienten framför $x$, förändringshastigheten. Gång på gång läste de uppgiftstexten och definitionen av $x$. Dock var det först när någon i gruppen uttalade med egna ord ”gånger $x$” som de förstod betydelsen av $x$. Det osynliga multiplikationstecknet var tvunget att uttalas i naturligt språk för att de skulle förstå betydelsen av $x$.

*Det algebraiska uttrycket behandlades som en ekvation.* Eleverna försökte lösa det algebraiska uttrycket som att det var en ekvation. Genom frågor från mig om uppgiftstexten, t.ex. att vi läste uppgiftstexten, kunde dessa grupper komma vidare genom att de då uttalade att det algebraiska uttrycket var *ett annat sätt att skriva* det som skulle stå på andra sidan likhetstecknet. Just uttalandet *ett annat sätt att skriva* löste situationen för dem så att de kunde teckna ekvationen.

### 5.2.2 Transformationen inom algebraisk representation

*Ekvationslösning*. När eleverna hade tecknat ekvationen löste de flest den genom att göra samma sak på båda sidor av likhetstecknet. De hanterar likhetstecknet på ett korrekt sätt, att det ska vara lika på båda sidor. Några grupper hade dock problem med den proceduren att göra samma sak på

båda sidor om likhetstecknet. De löste då ekvationen med hjälp av någon annan användbar metod; upprepad addition eller prövning. Det var framförallt gymnasieeleverna använde dessa metoder.

### 5.2.3 Transformationen mellan algebraisk representation och naturligt språk

*Betydelsen av x*. Orsakerna till att eleverna kom förbi detta hinder var att de läste uppgiftstexten återigen och definitionen av *x*. Flera grupper multiplicerade först det svar de fått på *x* i sin ekvationslösning, med förändringshastigheten men genom diskussioner med varandra kom de fram till att det svaret var orimligt. När de återigen läste texten och definitionen av *x* kunde de till slut tolka svaret. Problemet var att *x* står för ett tal och inte är en enhet.

*Tolka parametrarna.* Detta var ett annat hinder i denna transformation. För att komma förbi det behövde de hjälp med uppgiftens kontext. När de väl förstått att de hade hjälp av att se problemsituationen i ett vardagligt sammanhang kunde de tolka betydelsen av konstanten i det algebraiska uttrycket. När de däremot skulle tolka förändringshastigheten var det först när någon i gruppen uttalade det osynliga multiplikationstecknet som de kunde göra en korrekt tolkning.

### 5.2.4 Summering av orsakerna till att eleverna kommer förbi hinder i lärandesituationer

Delstudierna visar vad eleverna klarar av då de kommunicerar med varandra och med en lärare. För att komma förbi hindren krävdes att eleverna diskuterade och ställde frågor till varandra, att de uttalade betydelsen av variabler och uttryck och att de läste uppgiftstexten ett flertal gånger. De gick mellan naturligt språk och algebraisk representation fram och tillbaka. Det var viktigt för dem att förstå vad det handlade om. De behövde också hjälp av en mer kompetent person, läraren, som kunde guida dem för att komma vidare. Elevers problem att skilja variabler och enheter från varandra på visats i ett flertal studier (Weinberg et al., 2004) men orsakerna till detta behandlas inte. Genom att analysera transformationerna i algebraisk problemlösning med Duvals teori (2006) bidrar resultaten från dessa studier till att påvisa orsakerna till detta, det osynliga multiplikationstecknet. Det var tvunget att uttalas i naturligt språk för att eleverna skulle komma förbi detta hinder. Då eleverna kopplar ihop verkliga situationer med matematiken fick de algebraiska uttrycken betydelse som bidrog till att de kunde lösa uppgifterna.

Det som kan konstateras utifrån studiernas resultat är att diskussioner med andra elever och med läraren spelar stor roll för att eleverna ska komma förbi de hinder de stöter på.

## 5.3 Utmaningar för lärare i undervisningssituationer

Avhandlingens tredje övergripande frågeställning handlar om vilka utmaningar för lärarna som kan identifieras då kända algebrasvårigheter behandlas i undervisningssituationer. För att besvara detta har två delstudier genomförts. Den ena studien undersökte lärares frågor i relation till några kända algebrasvårigheter. Den andra studien undersökte hur algebrasvårigheter diskuteras och bedöms.

### 5.3.1 Lärares frågor i relation till algebrasvårigheter

Under de observerade genomgångarna ställde lärarna totalt 396 frågor och av dessa handlade 197 frågor om algebrasvårigheter. Övriga 201 frågor handlade om sådant som relateras till algebra såsom prioriterings- och räkneregler. Fyra algebrasvårigheter studerades och dessa kommer att diskuteras i relation till de frågor lärarna ställde.

Resultatet visar att lärarna ställer öppna frågor i 25–50 % av fallen och frågor på högre nivå i 5–11 % av fallen. Skillnaderna i andelarna beror på vilken algebrasvårighet som behandlas.

75 % av de frågor lärarna ställde om algebrasvårigheten kring olika betydelser av bokstäver i algebra var slutna frågor på lägre nivå (tabell 4.1). I exemplet i 4.2.4 så har eleven problem med tolkningen av $x$. Efter att denna svårighet framkommit ställer läraren slutna frågor på lägre nivå. Det kan vara ett medvetet val för att försäkra sig om att kontrollera elevernas grundläggande kunskaper och att de förstår lärandeinnehållet på en grundläggande nivå.

I kategorierna likhetstecknets betydelse och process-objekt dualitetet samt ekvationslösningsprocedurer var 68 % av lärarnas frågor slutna och på lägre nivå (tabell 4.2 och 4.3). Likhetstecknets betydelse och process-objekt dualitet samt procedurer för ekvationslösning är viktigt för elevernas fortsatta algebrastudier och det kan vara anledningen varför lärarna ställer slutna frågor på lägre nivå för att säkerställa att de har de grundläggande kunskaperna. Ett flertal forskare, till exempel Hiebert och Wearne (1993), poängterade redan för mer än 25 år sedan utifrån sina studier att frågor på högre nivå är viktiga för elevernas begreppsliga förståelse. Utifrån dessa tidigare

forskningsresultat så behöver eleverna få fler frågor på högre nivå. Om ca 70-75 % av frågorna är på lägre nivå så finns en tydlig risk för att elevernas utveckling, att de inte når en begreppslig förståelse utan de fastnar i ytlig förståelsen för begreppen (Star, 2005). Detta kan leda till att de tappar motivationen då det inte sker någon progression i deras utveckling.

Den kategori som skiljer sig mest från övriga kategorier är algebraisk problemlösning, där nästan hälften av frågorna är öppna frågor. 53% av frågorna är slutna frågor på lägre nivå. Skillnaden från övriga kategorier kan bero på problemlösningen i sig själv. Problemlösning inbegriper de övriga beskrivna algebrasvårigheterna vilket kan medföra att då man behandlar problemlösning i undervisningen så har eleverna fått arbeta med att definiera variabler och lösa ekvationer. Därmed har de erövrat de grundläggande färdigheter som krävs vilket gör det möjligt för läraren att ställa fler öppna frågor. En problemlösningsuppgift kräver oftast tolkning av text och uttryck, analys av uttryck och variabler vilket kan medföra att det blir naturligt för läraren att ställa fler öppna frågor och även på högre nivå.

### 5.3.2 Bedömning av algebrasvårigheter

Sex grupper av lärarstudenter bedömde fem elevlösningar av problemlösningsuppgiften Äpplen (figur 3.4). De algebrasvårigheter som är involverade i den uppgiften är mönster, ekvationslösning och algebraisk problemlösning. Två av lösningarna innehöll brister men enbart några av studentgrupperna diskuterade dessa algebrasvårigheter. Lärarstudenterna nämnde algebrasvårigheterna i bedömningen av 13 av totalt 90 deluppgiftslösningar. I de fall då de diskuterade matematiken i lösningen var när någon av dem började tolka lösningen eller kommentera bristerna. Oftast nämnde de att elevlösningen innehöll brister men de diskuterade inte orsakerna till bristerna. I de fall då lösningarna var korrekta diskuterade de inte någon av algebrasvårigheterna utom i ett fall.

Det är anmärkningsvärt att trots att elevlösningarna innehöll brister så använde studenterna endast matrisen som argument för sina bedömningar. De nämnde aldrig vad som var felaktigt, bara *att* det var fel. Detta kan bero på att den generella analytiska bedömningsmatrisen var för generell för att de skulle börja diskutera det specifika matematiska innehållet då de hade begränsade erfarenheter av bedömning. Den generella analytiska matrisen är måhända för generell för att ge stöd åt bedömningen. I Kjellström och Olofssons studie (2001) framkom att lärare föredrar uppgiftsspecifika matriser men de kräver mer arbete att utforma (Crusan, 2010) vilket gör att lärare i

större utsträckning använder generella matriser (Hafner & Hafner, 2003) som är allmänna och finns framtagna. Om matrisens syfte är att ge ett stöd i bedömningen och i återkopplingen till eleven så krävs troligen en annan typ av bedömningsmatris.

### 5.3.3 Summering av utmaningar för lärare i undervisningssituationer

Dessa båda delstudier identifierar att lärarna har flera utmaningar att ta sig an. Resultatet från den tredje delstudien visar att lärare ställer mest slutna frågor på lägre nivå vad det gäller olika algebrasvårigheter; *olika betydelser av bokstäver i algebra, likhetstecknets betydelse och process-objekt-dualitet samt ekvationslösningsprocedurer.* Det kan finnas naturliga förklaringar till det då eleverna är i början på sina algebrastudier och kanske inte erhållit så mycket kunskaper att de kan analysera och värdera olika situationer. Lärarna ställer troligtvis frågor på lägre nivå för att eleverna ska få grundläggande kunskaper först. Dock har forskningsresultat visat att det är viktigt att utmana eleverna i deras matematiska tänkande. Elever måste lära sig reflektera och analysera det matematiska innehållet (Jones & Tanner, 2002). De slutna frågorna på lägre nivå kan också skapa ett bekant och bekvämt klassrumsklimat poängterade Alrø och Johnsen-Høines (2012). Detta är en utmaning för lärarna att finna balansen så att eleverna får de grundläggande kunskaper men samtidigt utmana eleverna med öppna frågor så att eleverna lär sig att reflektera och analysera (Jones & Tanner, 2002).

Ett resultat från denna studie är att lärare ställer olika typer av frågor beroende på vilken algebrasvårighet som är i fokus. Då man behandlar de tre algebrasvårigheterna *olika betydelser av bokstäver i algebra, likhetstecknets betydelse och procedur-objekt-dualitet* samt *ekvationslösningsprocedurer* använde lärarna till största delen slutna frågor på lägre nivå. I dessa svårigheter är viktiga begrepp involverade, begrepp som har stor betydelse för elevernas kommande studier i algebra och därför viktigt att de har en fördjupad förståelse för. Det är då relevant att lärarna ställer frågor på kunskaps- och förståelsenivå för att kunna avgöra om eleverna har den förståelse för begreppen som de behöver. När lärarna behandlar *algebraisk problemlösning*, som inbegriper att eleverna har en viss förståelse för de övriga tre algebrasvårigheterna kan lärarna ställa en större andel öppna frågor för att eleverna har då möjlighet att förklara och utveckla sina idéer.

I delstudien om hur algebrasvårigheter diskuteras och bedöms visar det sig att utmaningarna för lärare är att ha argument för det man bedömer så att

orsakerna till brister i lösningar kan förklaras och eleverna får en meningsfull återkoppling som gör att de kommer förbi de hinder som finns.

## 5.4 Sammanfattande diskussion om algebrasvårigheter ur både elev- och lärarperspektiv och didaktiska implikationer

Resultaten från de fyra delstudierna har gjort det möjligt att besvara de övergripande frågeställningarna. I detta avsnitt kommer jag att göra en sammanfattande diskussion av algebrasvårigheter ur båda elev- och lärarperspektiv.

I elevstudierna (delstudie 1 och 2) framkommer det att det första hindret eleverna möter är i transformationerna mellan det naturliga språket och den algebraiska representationen vilket är tolkning av uppgiftstexten och skapandet av ekvationen. Ett annat hinder är i transformation mellan den algebraiska representationen och det naturliga språket vilket är mellan lösningen av problemet och tolkningen av svaret. Gemensamt för dessa båda transformationer är att betydelsen av $x$ och det osynliga multiplikationstecknet är hinder. När dessa algebrasvårigheter behandlas i undervisningen ställer lärarna till största delen slutna frågor på lägre nivå. Det är möjligt att genom en koncentration på frågor om fakta, förståelse och tillämpningar så ges eleverna inte de redskap de behöver för att kunna analysera och värdera information i en problemlösningsuppgift. Detta skulle kunna bidra till att eleverna lär sig att tänka matematiskt vilket är viktigt för elevernas matematiska utveckling, betonar Jones och Tanner (2002). Eleverna behöver få fördjupa förståelsen genom att arbeta med vad variabler i uttryck och ekvationer betyder. Det behöver få uttalas med naturligt språk. Från didaktisk synvinkel visar dessa resultat att mer tid i undervisningen kan med fördel ägnas åt transformationer mellan naturligt språk och algebraisk representation samt mellan algebraisk representation och naturligt språk.

Den största orsaken till att eleverna kommer förbi de olika hindren är att de samtalar med varandra, ställer utforskande frågor till varandra eller pratar med en lärare. Detta visar på att konversationen vid helklassgenomgångar kan bli betydelsefulla för eleverna. I en sådan konversation skulle läraren kunna ställa utforskande frågor (öppna frågor) till eleverna då det kan konstateras att det är viktigt för eleverna i och med att eleverna själva ställer sådana frågor till varandra.

Ytterligare en utmaning för lärarna visar den fjärde delstudien är att vid användande av en generell analytisk bedömningsmatris eller även i andra varianter av bedömning utröna orsakerna till elevernas brister i lösningar.

För att ge eleverna möjligheter att komma förbi hinder bör de få en relevant återkoppling som leder dem framåt och så att bristerna blir synliggjorda.

## 5.5 Fortsatt forskning

Resultaten från de genomförda studierna har bidragit till att fördjupa förståelsen för hinder gällande algebrasvårigheter i undervisning- och lärandesituationer. Duvals teori (2006) möjliggjorde att synliggöra ett flertal hinder genom analyserna av transformationer mellan olika representationsformer då eleverna diskuterade problemlösningsuppgifter. Elevers svårigheter att gå mellan det naturliga språket och algebraisk representation eller tvärtom har synliggjorts. Men varför kvarstår dessa svårigheter för gymnasieeleverna? Högstadieeleverna är i sin början av algebrastudier men gymnasieeleverna har under minst tre år stött på detta i undervisningen. Detta är något som borde studeras då resultaten i flera internationella studier visar på svenska elevers bristande kunskaper inom bland annat algebra.
Dessa studier visar att Duvals teori (2006) är ett kraftfullt verktyg för att synliggöra hinder genom att analysera transformationer mellan olika representationsformer. Därför borde detta verktyg användas för att studera andra algebraiska svårigheter så som t.ex. derivata-begreppet etc.

Lärares frågor i matematikklassrum är ett välstuderat område och i ett flertal studier har det framkommit att lärare ställer till stor del slutna frågor på lägre nivå. Att lärare ställer olika typer av frågor i relation till innehållet i undervisningen finns det dock inte mycket skrivet om. Detta borde studeras ytterligare för att utröna om vissa varianter av frågor passar ett område bättre än ett annat.

Bedömningsmatriser har förordats från både forskarhåll och från myndighetshåll. Framförallt för att de bidrar till att eleverna presterar bättre och för en tydligare medvetenhet om vad som ska läras. Att använda en generell analytisk bedömningsmatris i bedömning av något specifikt som algebrasvårigheter så finns många fallgropar. Här krävs studier i vilka bedömningsmatriser som kan bli ett kraftfullt verktyg för lärare i bedömningen och för återkoppling till eleverna.

# 6. Summary in English

## 6.1 Introduction, purpose, and issues

This dissertation deals with teaching and learning algebra in secondary school and upper secondary school. It has for a long time been debated that algebra is a problematic area (e.g. Kieran, 1992; Stacey & Chick, 2010) that students do not formally encounter in their early school years. In secondary school, algebraic concepts are introduced formally. Studies have shown that difficulties in early learning of algebra and functions can cause problems in later mathematics courses (Stacey & Chick, 2010). The difficulties might be due to the abstract nature of the mathematical language, which can be divided into three categories: natural language, symbolic writings and compound representations (Drouhard & Teppo, 2010). The natural language consists of meanings and phrases in, for example, Swedish. Symbolic writing consists of characters and expressions. Composite representation is a system of signs, a semiotic system and contains symbolic writing and graphs, tables and so on. Despite much research on algebra and its problems, there is a continuing need to study and deepen understanding of this subject.

This dissertation deals with teaching and learning algebra in years 7-10. The aim is to deepen the understanding of algebra difficulties from a student perspective and a teacher perspective. To study this, three general questions have been formulated:

- What obstacles for students can be identified when known algebra difficulties are addressed in learning situations?
- How can these obstacles be overcome for the students?
- What challenges can be identified for teachers when well-known algebra difficulties are involved in teaching situations?

Four sub-studies that have been completed create the basis for answering these questions.

The four sub-studies, which discuss different issues, will contribute to answering the overall questions. Through these sub-studies, I want to deepen the understanding of the obstacles that can be identified when algebra difficulties are dealt with in learning situations and how the students get past these obstacles. To investigate this, I studied students who discussed algebraic problem-solving tasks in small groups of 3-5 students. To gain further knowledge and understanding of this, I chose to investigate the types of questions that teachers pose regarding algebra difficulty to investigate which challenges they meet. To go further, I also chose to study some stu-

dent teachers in terms of how they discussed and evaluated some student solutions regarding algebra difficulties.

## 6.2 Algebra

The essence of algebra is, according to Kaput and Blanton (1999, 2001), algebraic reasoning, which consists of five cooperative forms of reasoning.

1. *Algebra as generalized and formalization of patterns and constraints*. This involves both generalized arithmetic, the properties of number systems, and generalizations that are formulated on specific number properties. Both of these categories include generalization of the concept of similarity.
2. *Algebra as syntactic-guided manipulation of formalities.* This form includes factorization and simplification of algebraic expressions.
3. *Algebra as a study of structures and systems abstracted from calculations and relationships.* This form includes reasoning and generalization of more abstract objects.
4. *Algebra as a study of functions, relationships and joint variation.* This form includes generalizations of numerical and geometric patterns to describe functions of dependent variation. This is important for understanding the concept of function and students' algebraic thinking.
5. *Algebra as a group of modelling and phenomenon-controlling languages*. This form includes two different types of generalizations, partly generating patterns and regularities. In part, this form also includes generalization of solutions to simple modelling tasks.

These categories emphasize, according to Kaput and Blanton (2001), the depth of algebra and connections to all mathematics, and because of the connections to all mathematics, algebra has a key role throughout the mathematics courses of secondary and upper secondary school. A few years earlier, Bednarz, Kieran, and Lee (1996) suggested a similar description of algebra categorized into four forms. Algebra is (1) generalization of arithmetic, (2) a way to solve problems, (3) a study of relations, and (4) a way of describing relationships between variables. This description of algebra does not contradict Kaput and Blanton's (2001) description, although their categorization is more extensive. In literature and in research reports, similar categorization of algebra can be found, for example in Principles and Standards for School Mathematics (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

### 6.2.1 Algebra difficulties

A large body of research (e.g., Stacey & Chick, 2010; Usiskin, 1988) has documented learners' difficulties with algebra, both with the use of variables and their general understanding of the nature of algebra. This might be related to the fact that algebra is perhaps the most abstract part of school mathematics.

Well-known algebra difficulties will be presented in this section. Algebra difficulties are concepts and algebraic subjects that create difficulties for students. The categories of algebra difficulties are based on Arcavi, Drijvers, and Stacey's (2017) categories in their book. They summarise their own and others' earlier research about the learning and teaching of algebra. These categories provide a basis for the analysis in this study.

*The Different Meaning of Letters in Algebra.* In mathematics, letters are used in equations, in formulas, in expressions for functions, and for generalizing patterns (Usiskin, 1988). The use of letters has been shown to be a difficulty for students. It might be difficult to understand that letters sometimes stand for unknown numbers, variables, or constants. Many researchers have documented that both the use of variables and the understanding of the nature of algebra are challenging for students (e.g., MacGregor & Stacey, 1997; Usiskin, 1988).

*Process–Object Duality***.** Sfard (1991; see also Sfard & Linchevski, 1994) emphasises that algebra could either be operational or structural (process–object duality) and that the structural aspect is difficult to achieve. Sfard and Linchevski (1994) give an example of process–object duality by explaining the fact that the expression $2x + 4$ invites students to perform an erroneous addition; the difficulty is in seeing the expression as an object rather than regarding it as a process. The incorrect answers could be $6x$ or 6, which is termed *lack of closure* (e.g., Tall & Thomas, 1991). This depends on the students' conviction that the expression is only a process waiting to be performed.

*The Meaning of the Equal Sign*. For many students, the equal sign is a signal to answer a question and perform some calculation. In algebra, the equal sign stands for equality, indicating that elements on both sides of the equal sign have the same value and could replace each other (Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Kieran, 1981; Rittle-Johnson & Alibali, 1999). If the students do not have a structural understanding of the equal sign, they might have problems with equations, such as $4 = 7 – 3$. They want it to be written as $7 – 3 = 4$ (Knuth, Stephens, McNeil, & Alibali, 2006). It is crucial that students under-

stand the relationship that the equal sign represents (Carpenter, Franke, & Levi, 2003).

*Procedures of Equation Solving.* The procedures used to solve an equation are important when, for example, solving problems, as doing so incorrectly can cause further problems for many students. If they do not understand the meaning of the equal sign, it will be difficult for them to solve an equation by being told to "do the same to both sides" if they are not being told what the "sides" refer to. Using a specific method to do the same operation on both sides of the equal sign is a powerful tool for solving equations (Arcavi et al., 2017). Guess and check is another useful way to solve equations, but not all equations can be solved with this method. Another useful method is to undo an equation, which means solving the equation backwards. Instead of adding, students subtract; instead of multiplying, students divide; and so on. This method is also powerful, but an equation such as $4(3+2x) - 5 = 7x$ cannot be solved using that method (Arcavi et al., 2017). However, solving equations is not a process in which students can calculate one side and produce the other side. When solving an equation, students have to preserve the equality. That is difficult for many students to understand (Arcavi et al., 2017).

*Algebraic Problem-Solving.* Drijvers (2003) wrote that problem-solving in algebra is more difficult than in other mathematical disciplines because of the abstractness of the problems to be solved and the nature of the algebraic language used, such as the complexity of its symbols and signs. The differences between arithmetic and algebraic problem-solving cause many difficulties. Arithmetic is usually about finding a numerical answer, whereas algebra describes mathematical structures. The students have to be familiar with algebraic notation and how to express the relationship between variables in the equation (Arcavi et al., 2017). Jupri and Drijvers (2016) investigated students' difficulties with algebraic problem-solving. They found that students have difficulty understanding words and sentences and formulating mathematical models and equations based on the problem text.

### 6.2.2 Theory to investigate student perspective on algebra difficulties

To investigate what obstacles for students can be identified when algebra difficulties are addressed in learning situation and how they overcome these obstacles, I chose Duval's (2006) theory of transformations between semiotic representations to analyse the data. Students from secondary and upper

secondary schools participated. They were observed during their discussion of some problem-solving tasks in small groups.

Researchers have documented students' difficulties with transformations between various mathematical representations (Adu-Gyamfi, Bossé, & Stiff, 2012; Bossé, Adu-Gyamfi, & Chandler, 2014), such as transformations between text problems and their mathematical representations; transformations between symbolic, tabular, and graphical representations; and transformations between natural language and algebraic language. Earlier research has mainly focused on *that it is* difficult in the transformation process but not as much on *how it is* difficult. Some researchers did study *how* transformations can be an obstacle, but they focused on transformations between symbolic, tabular, and graphical representations (Bossé, Adu-Gyamfi, & Chandler, 2014), not on the transformation between natural language and the algebraic language, which is one of the focuses of this dissertation. Students can often solve equations without being able to explain what the answer means (e.g. Sfard & Linchevski, 1994a, 1994b). I will investigate students' ability to go from natural language to algebraic language and back, which will increase the understanding of how students make meaning of algebraic signs, to better understand the nature of the obstacles and where they likely occur when students solve mathematical tasks. I will also investigate how students overcome the obstacles. Algebraic problems involve signs, which are historically developed cultural tools. Meaning develops and is understood differently in various cultures and contexts and among individuals, even if they use the same definition of a concept (Biehler, 2005; Duval, 2006). Duval (2006) claims that "the leading role of signs is not to stand for mathematical objects, but to provide the capacity of substituting some signs for others" (p. 106). He refers to two types of transformations: *treatments* and *conversions*. Furthermore, he uses the word *register* to denote a semiotic system that permits the transformation of representations (Duval, 2006, p. 111). Treatments are defined as transformations within one register, such as rephrasing or solving an equation using algebraic signs and symbols. Conversion is defined as a transformation that changes the register, such as going from an algebraic to a graphic representation of a function while maintaining the same conceptual reference. Duval (2006) claims that performing a conversion (i.e. changing the representation register) is the most challenging transformation for students. Representation registers can be divided into two groups: *monofunctional* and *multifunctional*. Registers that enable mathematical processes such as algorithms (e.g. a manipulation of algebraic expressions) are described as monofunctional registers. Semiotic

systems that can be used for various cognitive functions, such as awareness and communication, and in which processes cannot be made into algorithms are called multifunctional registers. Additionally, Duval (2006) distinguishes between *discursive* and *non-discursive* registers. A discursive register involves statements of relations or properties, and a non-discursive register consists of, for example, figures, graphs, and diagrams. All transformations, both treatments and conversions, can occur among these four register types. The conversion is, according to Duval (2006), most challenging because of the cognitive complexity in shifting between registers. A conversion in which the transformation from one register to another can be performed via a sign-by-sign translation appears easier than one in which this is not the case. Duval (2006) refers to these as congruent and non-congruent transformations, respectively (for further details, see Duval, 2006, pp. 108–114).

### 6.2.3 Theory to investigate teachers' perspective on algebra difficulties

*Teachers' questioning.* To deepen the understanding of what challenges can be identified for teachers when well-known algebra difficulties are involved in teaching situations, I chose to investigate whether the type of algebraic challenge involved affects the kinds of questions the teachers use in whole-class conversations. In this section, I will present some research about questioning and why it is important.

Communication in mathematics classrooms has often been characterised by teachers asking questions and students answering them, in most cases with one or a few words. Some researchers have argued that more open-ended questions contribute to students' construction of mathematical knowledge (e.g. Sullivan & Clarke, 1992). However, it has also been stated that teachers usually ask closed questions (Stigler & Hiebert, 1999). Research about questions in the classroom has shown that teachers often ask lower order questions and knowledge and comprehension questions and rarely ask higher order questions and analysis, synthesis, and evaluation questions (Bloom, 1956), even though higher order questions have been identified as important for students' understanding (e.g. Hiebert & Wearne, 1993). Hiebert and Wearne (1993) argued that questions need to be seen in a specific context. Hence, teachers might use lower order questions in one context and higher order questions in another context and according to the content. This dissertation will contribute to understanding how different questions might suit different contexts. We know a lot about algebraic challenges but not much about how teachers' questioning affects different challenges. Furthermore,

much research has been done on teachers' questioning in classrooms and on questioning as a tool to create an inquiring culture in the classroom. Teachers ask a lot of questions, mostly closed lower order questions, which can be useful in some contexts, and open higher order question in other contexts. This is in the focus of the dissertation.

*Specific algebra difficulties in scoring.* To deepen the understanding of what challenges can be identified for teachers when well-known algebra difficulties are involved in teaching situations, I will investigate how student teachers discuss and score some students' problem-solving solutions.

Studies on scoring with rubrics have shown that they provide several benefits during the assessment process. They enable teachers to provide pupils with more meaningful feedback, and they support teachers' self-evaluation (Arter & McTighe, 2001; Beyreli & Ari, 2009). Rubrics can also help teachers refine their teaching skills (Moskal, 2000), promote learning, and improve pupils' achievement (Jonsson & Svingby, 2007). They assess which criteria pupils have met and provide feedback on how pupils can enhance their achievements (Andrade, Du, & Wang, 2008; Spandel, 2006). Lovorn and Rezaei (2011) emphasize that an effective rubric is task-specific, analytic, and accompanied by example solutions. Hence, studies have shown great potential for enhancing the use of rubrics for both pupils and teachers.

This dissertation will deepens the understanding of how using a general analytic rubric affects the discussion of how the rubric supports feedback in terms of task-related algebra content and algebra difficulties. The analytic rubric is, according to Hafner and Hafner (2003), the most popular rubric and must be studied further. Furthermore, the combination of a general and an analytic rubric has seldom been studied, as well as how it affects the discussion and scoring of algebra difficulties.

## 6.3 Method

The overall purpose of this dissertation is to deepen the understanding of algebra difficulties from the student and teacher perspectives. The four substudies that have been carried out provide the basis for answering the thesis's overall questions. These questions are about which obstacles for the students can be identified when dealing with algebra difficulties in learning situations and how they overcome these obstacles, as well as what challenges for teachers can be identified when dealing with algebra difficulties in teaching. The following methods were used in the studies to help answer the thesis's overall questions.

### 6.3.1 Method in sub-study 1

Upper secondary school students' problem-solving discussions are analysed with regard to algebra difficulties with the help of Duval's framework for transformations. The group discussions with the upper secondary school students in small group discussion were recorded (both audio and video) and the material was transcribed. The notes and calculations the students made when discussing and solving the problem-solving task were also collected to be able to analyse their discussions without losing any information. To analyse the students' group discussions two tools for analysing were used, modelling cycle and the theory of Duval (2006)

### 6.3.2 Method in sub-study 2

Year 8 student problem-solving discussions were analysed with respect to algebra difficulties with the help of Duval's framework for transformations. The group discussions with the secondary school student' small group discussions were recorded (both audio and video) and the material was transcribed. The notes and calculations the students made when discussing and solving the problem-solving task were also collected to be able to analyse their discussions without losing data. To analyse the students' group discussion the theory of Duval (2006) was used.

### 6.3.3 Method in sub-study 3

Teacher's questions during reviews are analysed with regard to algebra difficulties with the help of a model of different types of questions. The whole class sessions were also recorded and the material was transcribed. Additional material distributed by the teachers was collected as a complement to the recorded material. In this investigation teachers' questions regarding algebra difficulties, were in focus. The different algebra difficulties were *different meaning of letters in algebra, the meaning of the equal sign and process-object duality, procedure of equation solving and algebraic problem solving*. Each question was categorized depending on which algebra difficulty that was in focus, if the question was closed or open and if it was a low-order question or if it was high-order question.

### 6.3.4 Method in sub-study 4

Student teachers' scoring discussions of student solutions are analysed with regard to how the algebraic difficulties in the solutions are scored. Student

teachers' scoring discussions were recorded and transcribed. Their written scorings and notes in the student solutions were also collected to supplement their scoring discussions. Six student teacher groups scored five students' solution of an algebraic task. They had five solution to score, each solution contain three part solutions, which entail six student teacher groups times five times three part solutions, totally 90 part solutions.

## 6.4 Results

In the following section, some results of the studies from students' and teachers' perspectives on algebra difficulties will be presented.

### 6.4.1 Student perspective on algebra difficulties - Transformations in students' solutions

*Transformation between natural language and algebraic representation.* The obstacles for most of the groups in secondary and upper secondary school, when going from the task to the algebraic equation, was the meaning of $x$ and the invisible multiplication sign between the rate of change and $x$. They interpreted $x$ as a unit. They overcame that when they articulated the multiplication sign as "times" with natural language because they asked each other inquiring questions until they were satisfied with their interpretation and reached a shared understanding.

Another obstacle in this transformation was that they thought they had an equation to solve, but they just had the algebraic expression and had not constructed the equation. However, it seems that they knew the procedure for solving the equation, so they worked with the expression as if it were an equation. They overcame the obstacle after some help from me. For example, we read the task together and I asked some questions regarding the task. The breakthrough was when some of them said something like "another way to write" the expression. Then, they were able to set up the equation and solved it.

*Transformation within the algebraic representation.* This transformation was not an obstacle for the groups. They continued and reached the goal—the solution of the equation—because they knew the procedure for solving equations.

*Transformation between the algebraic representation and the natural language.* The obstacle in this transformation was the meaning of $x$ and the invisible multi-

plication sign. Because they still interpret $x$ as a unit. They were unable to see that $x$ equals the answer. They overcame the obstacle with help of the text in the task. They discussed their solution, and after a while, they went back to the text and read the definition of $x$, which reminded them what $x$ was.

Other obstacles for the groups in the interpretation of the parameters were the contexts of the task and the different units of the rate of change and the constant in the expression. They overcame that obstacle when I asked about the real-life context. They immediately recognized what the answer would be. The other groups had the same problem and needed some helping questions about the text and reminders about the text in the task to reach the answer.

### 6.4.2 Teachers' perspectives on algebra difficulties – Teachers' questioning and student teachers' scoring

In this investigation of teachers' questions regarding algebra difficulties were in focus: *different meaning of letters in algebra, the meaning of the equals sign and process-object duality, procedure of equation solving,* and *algebraic problem-solving*.

*Teachers' questioning.* The results show that approximately 70–75% of the teachers' questions were closed questions of lower order regarding the algebra difficulties *different meaning of letters in algebra, the meaning of the equal sign and process-object duality,* and *procedure of equation solving*, which means that the questions were about what the students should already know and rephrasing information in a new context or identifying relevant information to solve a task (Bloom, 1956).

Teachers' questions regarding the algebra difficulty *algebraic problem-solving* differ from those regarding the other difficulties. The teachers asked approximately 50% closed questions of lower order and nearly 50% open questions of lower order. Summaries of the results show that most of the questions were closed, lower order questions (66%). The higher order questions were almost all open (86%).

*Specific algebra difficulties in scoring***.** To deepen the understanding of how algebra difficulties are discussed and scored with a general analytic scoring rubric, six student teacher gruops scored five students' solutions to an algebraic task, totally they scored 90 partial solutions. In 13 cases, the student teachers mentioned specific difficulties—especially when they discussed incorrect solutions. However, not all of the groups discussed specific algebra difficulties, even if the solution was incorrect or had shortcomings. In seven

cases, the student teachers tried to interpret the solutions and discussed what the pupils had done before referring to the rubric and scoring the solution. In three cases, they commented on the mathematical content of the solutions, and in three others, they just made general comments about the solutions before turning to the rubric.

## 6.5 Discussion

The results regarding the student's perspectives on algebra difficulties will be discussed first. After that, the results of teachers' perspectives will be discussed. Finally, a discussion of the results regarding both perspectives will be presented.

### 6.5.1 Student perspectives on algebra difficulties

The results of these studies show that obstacles to students' transformations of algebraic signs exist, especially when the students were forced to change registers, which is in line with what Duval (2006) showed. These groups of students found the meaning of $x$ after they asked each other questions and read the instructions several times. They were able to solve the equation but did not understand the meaning of the solution. Many previous researchers found the same results (e.g. Bills, 2001; Ursini & Trigueros, 2004): Students have difficulty understanding and interpreting what $x$ stands for. The invisible multiplication sign between, for example, 8 and $x$ in $8x$ also created difficulties. However, through discussion with each other or help from a more competent person, they finally understood its meaning. Duval's (2006) framework makes it possible to provide new information about the nature of the obstacles that can occur in the problem-solving process.

These studies show what the students managed to do when they were communicating with each other and with a teacher. The students created meaning when they asked each other investigative questions, such as in the second example, and when they stated the symbolic representation in words, for example, when they pronounced the invisible multiplication sign. Their investigative questions made it possible for them to perform the challenging conversion when they made the transformation from, for example, algebraic language to natural language. In addition, they needed help putting the solution into a realistic context to be able to interpret it adequately. This became meaning making in the context.

The results show that the meaning of $x$ and the invisible multiplication sign were two integrated obstacles in that $x$ stands for the unit and the invisible

multiplication character plays a crucial role in this interpretation. For the deeper understanding required for the students' continued studies, they need to practice this. For example, they can explicitly pronounce the invisible multiplication sign, where $8x$ is pronounced eight multiplied by $x$ or eight times $x$, instead of eight $x$. In particular, when introducing algebra, this can be a step in the right direction for students to gain a deeper understanding.

Students' problems with variables and units have been shown in a number of studies (e.g. Knuth et al., 2005), but the reasons for this are not addressed. By analysing the transformations in problem-solving with Duval's theory (2006), the results of these studies help to identify the cause, the invisible multiplication sign. For students to overcome this obstacle, it had to be pronounced in natural language. As students connected real-world situations to mathematics, the algebraic expressions gained meaning that helped them to solve the problems.

From a didactical point of view, these results show that more attention during teaching should preferably be placed on transformations between natural language and algebraic language and between the solution and interpretation of the solution, which is where most of the difficulties appeared.

### 6.5.2 Teachers' perspectives on algebra difficulties

*Teachers' questions.* The results of this study verify Hiebert and Wearne's (1993) finding that teachers ask mostly closed, lower order questions. However, this study's focus was to investigate whether teachers' use of questions differed in various algebra challenges. The results indicate differences among the four algebra challenges. Regarding the meaning of algebraic letters in algebra, the meaning of the equal sign and process–object duality, and procedures for solving equations, approximately 70 to 75% were closed, lower order questions. Regarding algebraic problem-solving, approximately 50% were open, lower order questions. However, the episodes show that some of the students were in the beginning of their algebra studies and some had a few years of algebra studies behind them. They might not have possessed much knowledge to use when explaining and analysing the various situations. At the same time, researchers have pointed out that it is important to challenge students in their mathematical thinking. Students must learn how to perceive, reflect, and analyse to make sense of mathematics (Jones & Tanner, 2002). The IRE patterns, which were observed in some classrooms, can also be perceived as well known and comfortable (Alrø &

Johnsen-Høines, 2012). This poses a challenge for teachers who seek to maintain the balance between these implications.

In one of the four algebra challenges, the teachers asked various kinds of questions. Regarding algebraic problem-solving, the teachers' questions differed from questions asked in relation to other challenges. Almost 50% of the questions were open, and most were of a lower order. Algebraic problem-solving is more abstract than other challenges, as are the symbols, signs, and nature of the algebraic language used (Drijvers, 2003). To accomplish algebraic problem-solving, students must be familiar with algebraic notation and know how to express relationships between variables in equations (Arcavi et al., 2017). Hence, all other challenges are involved in algebraic problem-solving. This can create an opportunity for teachers to ask more investigative and open questions to encourage students to reflect and analyse the problem-solving process.

*Specific algebra difficulties in scoring.* The results regarding how algebra difficulties are discussed when pupil solutions are scored show that they barely discuss the difficulties. The task involved three specific algebra difficulties: patterns, equations, and algebraic problem-solving. The first two of the five solutions were incorrect; for these cases, some of the student teachers discussed these difficulties, but not every group did so. The student teachers mentioned these difficulties in only 13 of the 90 parts' solutions (only for the incorrect ones). In these 13 cases, they discussed the causes of the shortcomings or the algebra difficulty that the task focused on. They typically started to discuss the mathematics of the solution when someone in the group started to interpret the solution or comment on its shortcomings. The student teachers indicated when the pupils' solutions contained shortcomings but did not discuss the underlying causes of the shortcomings.

For the cases in which the solutions were correct, the student teachers did not discuss any of the specific algebra difficulties, which is not surprising; by contrast, for the cases in which the solutions were incorrect, they should have treated the difficulties to some extent. However, the extent of this effect might depend on the general analytic rubric. The rubric in this study was perhaps too general to encourage these student teachers to discuss specific mathematical content, as they had limited experience. As mentioned before, rubrics enable teachers to give students more meaningful feedback (Arter & McTighe, 2001), so it might be important to tell the students about the causes of their solutions' shortcomings.

### 6.5.3 Algebra difficulties regarding students' and teachers' perspectives

The results of the four sub-studies have made it possible to answer the overall questions. In this section, I will present a summary discussion of algebra difficulties from both student and teacher perspectives.

In the student studies (sub-studies 1 and 2), it appears that the first obstacle the students encountered was in the transformations between the natural language and the algebraic representation, which is the interpretation of the assignment text and the creation of the equation. Another obstacle was the transformation between the algebraic representation and the natural language, which is between the solution of the problem and the interpretation of the answer. Common to these two transformations is that the meaning of x and the invisible multiplication sign are obstacles. When these algebra difficulties were addressed in the teaching, teachers mostly asked closed questions at a lower level. It is possible that by focusing on questions about facts, understanding, and applications, the students are not given the tools they need to be able to analyse and evaluate information in a problem-solving task. This could help students learn to think mathematically, which is important for students' mathematical development, as emphasized by Jones and Tanner (2002). Students need to gain in-depth understanding by working on what variables in expressions and equations mean. These variables need to be stated in natural language. These results show that more time in teaching can advantageously be spent on transformations between natural language and algebraic representation and between algebraic representation and natural language.

The fourth sub-study showed that another challenge for teachers is that when using a general analytical scoring rubric or even other variants of assessment, the causes of students' shortcomings in solutions are identified. To give students opportunities to overcome obstacles, they should receive relevant feedback that guides them forward and makes the deficiencies visible.

# 7. Referenser


Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School Science and Mathematics, 112*(3), 159–170.

Alrø, H., & Johnsen-Høines, M. (2012). Inquiry – without posing questions? *The Mathematics Enthusiast, 9*(3), 253–270.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique*. New York, NY: Springer.

Andrade, H., Du, Y., & Wang, X. (2008). Putting rubrics to the test: The effect of a model, criteria generation, and rubric-referenced self-assessment on elementary school students' writing. *Educational Measurement: Issues and Practices*, *27*(2), 3–13.

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra. Ideas, insights and activities.* New York, NY: Routledge.

Arter, J., & McTighe, J. (2001). *Scoring rubrics in the classroom. Using performance criteria for assessing and improving student perfomance*. Thousand Oaks, CA: Corvin Press.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Barnes, D. R. (1992). *From communication to curriculum.* Boynton: Coke Publishers.

Barton, B. (2009). *The language of mathematics: Telling mathematical tales.* New York, NY: Springer.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Red.) (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching.* (s. 3–12). Dordrecht The Netherlands: Kluwer Academic.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13–16.

Beyreli, L., & Ari, G. (2009). The use of the assessment of writing performance: Inter-rater concordance study. *Educational Science: Theory and Practice, 9*(1), 105–125.

Bills, L. (2001). Shifts in the meanings of literal symbols. I M. van den Heuvel-Panhuizen, (Red.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, (s.161–168). Utrecht: Freudenthal Institute.

Bishop, J. W., & Stump, S. L. (2000). Preparing to teach in the new millennium: Algebra through the eyes of pre-service elementary and middle-school teachers. I M. Fernandez (Red.), *22nd annual conference of the North American Chapter of the International Group for the Phychology of Mathematics Education* (s. 107–113). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives – Handbook 1 Cognitive domain.* London: Longmans.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? I C. Haines, W. Blum, P. Galbraith, & S. Khan (Red.), Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics (s. 222–231). Chichester: Horwood.

Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance, nature, and impact of teacher questions. I D. E. Dougall & J. A. Ross (Red.), *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 774–782) Toronto: OISE/UT.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Chandler, K. (2014). Student's differentiated translation processes. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.* Hämtad från http://www.cimt.org.uk/journal/bosse5.pdf

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125–153.

Bråting, K., Hemmi, K., Madej, L., & Röj-Lindberg, A-S. (2013). Towards research-based teaching of algebra – Analyzing expected student progression in the Swedish curriculum for grades 1–9. Paper presenterat på ICME-13, *the 13th International Congress on Mathematical Education,* Hamburg, Tyskland.

Bush, S. B., & Karp, K. S. (2013). Prerequisite algebra skills and associated misconceptions of middle grade students: A review. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 613–632.

Carpenter, T, Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Intergrating arithmetic & algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87–115.

Cazden, C. B. (1988). *Classroom discourse: The language of teaching and learning.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly, 88*(4), 286–290.

Collis, K. F. (1978). Operational thinking in elementary mathematics. I J. A. Keats, K. F. Collis, & G. S. Halford (Red.), *Cognitive development: Research based on a neo-Piagetian approach.* Chichester: John Wiley & Sons.

Crusan, D. (2010). *Assessment in the second language writing classroom.* Ann Arbor, MI: University of Michigan Press.

Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, R. (2001). From arithmetic to algebra thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Red.) *Perspectives on school algebra*, (s. 199–207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

Doerr, H. M. (2010). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. I K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study*, (s. 267–290). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

Draper, R. J. (2002). School mathematics reform, constructivism, and literacy: A case for literacy instruction in the reform-oriented math classroom. *Journal of Adolescent and Adult Literacy*, *45*(6), 520–529.

Drouhard, J-P., & Teppo, A. R. (2010). Symbols and language. I K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study*, (s. 227–264). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103–131.

Dysthe, O. (2003). *Dialog, samtal och lärande*. Lund, Sweden: Studentlitteratur.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19–26.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology*, *24*(5), 645–657.

Hafner, J., & Hafner, P. (2003). Quantitative analysis of the rubric as an assessment tool: An empirical study of student peer-group rating. *International Journal of Science Education*, *25*(12), 1509–1528.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59–78.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1993). Instructional tasks, classroom discourse, and students' learning in second-grade arithmetic. *American Educational Research Journal*, *30*(2), 393–425.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372–400.

Jakobsson-Åhl, T. (2006). *Algebra in upper secondary mathematics: A study of textbooks used in the years 1960–2000 in Sweden*. Licentiate thesis, 2006:33. Department of mathematics, Luleå: University of Technology.

Janvier, C. (1987). Translation process in mathematics education. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (s. 27-31). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Johansson, B. G. (2004). *Matematikens historia.* Lund: Studentlitteratur.

Johnson, S. (2001). Learning to teach algebra in UK: Trainee teachers experiences. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (s. 336–343). Melbourne Australia: The University of Melbourne.

Jones, S., & Tanner, H. (2002). Teachers' interpretations of effective whole-class interactive teaching in secondary mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *28*(3), 265–274.

Jonsson, A., & Svingby, G. (2007). The use of scoring rubrics: Reliability, validity and educational consequences. *Educational Research Review*, *2*(2), 130–144.

Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 683-710.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. I E. Fennema & T. A. Romberg (Red.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (s. 133–155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structures. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, (*s. 344–351). Melbourne Australia: The University of Melbourne.

Kehle, P. E. & Lester, F. K. (2003). A semiotic look at modeling behavior. I R. Lesh & H. M. Doerr (Red.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (s. 501–517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1981). Concept associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (s. 390–419). New York, NY: Maxmillan.

Kieran, C. (2010). The core of algebra: Reflections on its main activities. I K. Stacey, H. Chick, M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (s. 21–33). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

Kinzel, M. T. (1999). Understanding algebraic notation from the students' perspective. *Mathematics Teacher 92*(5), 436–442.

Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times.* New York, NY: Oxford University Press.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality and variable. *International Reviews on Mathematical Education, 37*(1). 1–9.

Knuth, E., J., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2006). Does the understanding of the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal of Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312.

Korp, H. (2003). *Kunskapsbedömning: Hur, vad och varför*. Stockholm, Sweden: Myndigheten för Skolutveckling.

Ku̇chemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School, 7*(4), 23–26.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. I K. M. Hart (Red.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (s. 102-119). London: John Murray.

Kvale, S. B. (2009). *Interviews: Learning the craft of qualitative research interviewing.* London: Sage Publication, Inc.

Kyriacou, C., & Issitt, J. (2008). *What characterises effective teacher – initiated teacher – pupil dialogue to promote conceptual understanding in mathematics lessons in England in Key Stages 2 and 3?* Report no. 1604R, EPPI – Centre, Social science research unit, Institute of Education, University of London, UK.

Lane, S. (1993). The conceptual framework for the development of a mathematics performance assessment instrument. *Educational Measurement Issues and Practices*, *12*(2), 16–23.

Lemke, J. L. (1990). *Talking science: Language, learning and values.* Westport, CT: Ablex Publishing Corporation.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving. I R. Lesh & M. Landau (Red.), *The acquisition of mathematical concepts and processes* (s. 263–343). New York, NY: Academic Press.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. I F. K. Lester Jr. (Red.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 763–804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lovorn, M. G., & Rezaei, A. L. (2011). Assessing the assessment: Rubrics training for pre-service and new in-service teachers. *Practical Assessment Research and Evaluation*, *16*(16), 1–18.

Mac Gregor, M. (1986). A fresh look at fruit salad. *The Australian Mathematics Teacher, 42*(3), 9–11.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–16, *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1–19.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 97–111.

Mehan, H. (1979). *Learning lessons: Social organization in the classroom*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Meier, L. S., Rich, B. S., & Cady, J. (2006). Teachers' use of rubrics to score non-traditional tasks: Factors related to discrepancies in scoring. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, *13*(1), 69–95.

Menzel, B. (2001). Language conceptions of algebra are idiosyncratic. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference,* (s. 446–453). Melbourne Australia: The University of Melbourne.

Moses, R. P., & Cobb, C. E. (2001). *Radical equations: Math literacy and civil rights.* Boston, MA: Beacon Press.

Moskal, B. B. (2000). Scoring rubrics: What, when and how? *Practical Assessment, Research & Evaluation*, *7*(3). Hämtad från https://pareonline.net/getvn.asp?v=7&n=3

Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(4), 293–315.

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(2), 168–190.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA: Author.

Newman, D., Griffin, P., & Cole, M. (1989). *The constructive zone: Working for cognitive change in school.* Cambridge: Cambridge University Press.

Pandero, E., & Jonsson, A. (2013). The use of scoring rubrics for formative assessment purposes revisited: A review. *Educational Research Review*, 9, 129–144.

Peirce, C. S. (1998). *The Essential Peirce: Selected philosophical writings*. (Vol. 2). (N. Houser, J. R. Eller, A. C. Lewis, A. De Tienne, C. L. Clarke, D. B. David, Red.). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Pesek, D. D., & Kirschner, D. (2000). Interference of instrumental instruction in subsequent relational learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *31*(5), 524–540.

Pólya, G. (1957). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ogden, C. K., & Richards, I. A. (1952). *The meaning of meaning.* London, England: Routledge and Kegan Paul Ltd.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2006). *PISA released items: Mathematics*. Hämtad från https://www.oecd.org/pisa/38709418.pdf

Quinlan, C. (1992). Levels of understanding of algebraic symbols and relationship with success on algebraic tasks. I A. Baturo & T. Copper (Red.). *New directions in algebra education,* (s. 124–157). Red Hill, Qld: Queensland University of Technology.

Ralph, E. G. (1999). Oral-questioning skills of novice teachers: …any questions? *Journal of Instructional Psychology*, *26*(4), 286–296.

Reddy, Y. M., & Andrade, H. (2010). A review of rubric use in higher education. *Assessment and Evaluation in Higher Education*, *35*(4), 435–448.

Rezaei, A. R., & Lovorn, M. (2010). Reliability and validity of rubrics for assessment through writing. *Assessing Writing*, *15*(1), 18–39.

Rittle_Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural understanding: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, *91*(1), 175–189.

Schoenfeld, A.H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher 81*(6), 420–427.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. I D. Grouws (Red.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 334–370). New York, NY: McMillan.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 191–228.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Skolverket. (2005). Nationellt prov i matematik. Kurs A. Våren 2005, del 2, uppgift 5. Stockholm, Sverige: Skolverket.

Skolverket. (2011a). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskolan.* Stockholm, Sweden: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet.* Stockholm, Sweden: Skolverket.

Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Hämtad från https://www.skolverket.se/getFile?file=3794

Sriraman, B., & Kaiser, G. (2006). Theory usage and theoretical trends in Europe: A survey and preliminary analysis of CERME 4 research reports. *ZDM, 38*(1), 22-51.

Stacey, K., & MacGregor, M. (1997). Ideas about symbolism that students bring to algebra. *Mathematics Teacher, 90*(2), 110–113.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 149–167.

Stacey, K., & Chick, H. (2010). Solving the problem with algebra. I K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Red.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (s. 1–20). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

Star, J. R. (2005). Re-conceptualizing procedural knowledge. *Journal of Research in Mathematics Education, 36*(5), 404–411.

Star, J. R., & Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*(6), 565 – 579.

Stein, M. K., Baxter, J., & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Research Journal 27*(4), 639–663.

Steinbring, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching: Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(6), 503– 522.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 133–162.

Steinbring, H. (2009). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction. An epistemological perspective.* New York, NY: Springer

Stiegler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap.* New York, NY: The Free Press.

Stump, S. (1999). Secondary mathematics knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal, 11*(2), 124–144.

Sullivan, P., & Clarke, D. (1992). Problem solving with conventional mathematics content: Responses of pupils to open mathematical tasks. *Mathematics Education Research Journal, 4*(1), 42–60.

Swan, M. (2000). Making sense of algebra. *Mathematics Teaching, 171,* 16–19.

Tall, D. O., & Thomas, M. O. J. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics, 22*(2), 125-147.

Tirosh, D., Even, R., & Robinson, N. (1998). Simplifying algebraic expressions: Teacher awareness and teaching approaches. *Educational Studies in Mathematics, 35*(1), 51–64.

Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien*. Lund; Studentlitteratur.

Ulleberg, I., & Heiberg Solem, I. (2018). Which questions should be asked in classroom talk in mathematics? Presentation and discussion of a questioning model. *Acta Didactica Norway, 12*(1), 1–21.

Ursini, S., & Trigueros, M. (2004). How do high school student interpret parameters in algebra? I M. Johnsen-Høines & A. B. Fugelstad (Red.), *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (s. 361–368). Bergen: Bergen University College.

Usiskin, Z. (1988). Conception of school algebra and uses of variables. I A. F. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (s. 7-13). Reston, VA: NCTM.

Usiskin, Z. (1996). Mathematics as a language. In P. C. Elliot & M. J. Kennedy (Red.), *Communication in mathematics, K–12 and beyond,* (s. 231–243). Reston VA: NCTM.

Vetenskapsrådet (2011). *God forskningssed.* Vetenskapsrådets rapportserie 2011:1. Hämtad från https://publikationer.vr.se/produkt/god-forskningssed.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology, 21*(4), 555–570

Walkington, C., Petrosino, A., & Sherman, M. (2013). Supporting algebraic reasoning through personalized story scenarios: How situational understanding mediates performance. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(2), 89–120.

Wells, G. (1993). Revaluating the IRF sequence: A proposal for the articulation of theories of activity and discourse for the analysis of teaching and learning in the classroom. *Linguistics and Education, 5*(1), 1–37.

Weinberg, A. D., Stephens, A. C., McNeil, N. M., Krill, D. E., Knuth, E. J., & Alibali, M. W. (2004). Students initial and developing conceptions of variable. *Paper presented at the annual meeting for the America Educational Research Association,* San Diego, CA.

Zawojewski, J., & Lesh, R. (2003). A model and modeling perspective on problem solving. I R. Lesh & H. M. Doerr (Red.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving,*

*learning, and teaching* (317-336). Mahwah, NJ. Lawrence Erlbaum Associates Inc., Publichers.

Ärlebäck, J. B. (2009). *Mathematical modelling in upper secondary school mathematics education in Sweden. A curricula and design study*. Doctoral dissertation, Linköping University, Linköping.

Ärlebäck, J. B., & Bergsten, C. (2010). On the use of realistic Fermi problems in introducing mathematical modelling in upper secondary mathematics. I R. Lesh, P. L. Galbraith, W. Blum, & A. Hurford (Red.), *Modeling students' mathematical modeling competencies. ICTMA 13* (s. 597-609). New York, NY: Springer.

Ärlebäck, J. B. (2013). Matematiska modeller och modellering – vad är det? *Nämnaren, 3,* 21 – 26.

# Bilaga

## Bedömningsmatris

Inspirerad av Katarina Kjellström s. 213 i Lindström & Lindberg, 2011.

| Matematisk kunskap<br>Kan eleven detta? | Strategisk kunskap<br>(Hur planerar eleven?) | Förklaringar<br>(Kan eleven förklara?) |
|---|---|---|
| • Eleven visar allt den gjort för att komma fram till rätt svar och betecknar det rätt.<br>• Eleven använder matematiska termer på ett lämpligt sätt och visar att den förstår hur matematiken fungerar.<br>• Eleven gör sina beräkningar utan misstag. | • Eleven upptäcker alla viktiga delar av problemet och vet hur de hör ihop.<br>• Eleven visar alla steg den använder för att lösa uppgiften.<br>• Eleven visar att den kan använda bilder, diagram, modeller eller beräkningar om de ingår i sin strategi. | • Eleven förklarar *vad* den gjorde och *varför* den gjorde det.<br>• Om eleven ritar en figur kan den förklara allt om den skriftligt.<br>• Eleven förklara det den beräknar i huvudet eller med miniräknaren. |
| • Eleven använder de flesta matematiska termer på ett lämpligt sätt.<br>• Eleven gör ibland mindre fel när den gör beräkningar. | • Eleven upptäcker de flesta delarna av problemet.<br>• Eleven använder en rimlig strategi och visar de flesta steg den använder för att lösa problemet. | • Eleven förklarar mest *vad* den gjorde.<br>• Eleven förklarar lite om *varför* den gjorde det.<br>• Om eleven ritar en figur, kan den förklara det mesta om den skriftligt. |
| • Eleven vet hur den ska lösa delar av uppgiften men ibland gör den grova fel i sina beräkningar och kommer fram till fel svar.<br>• Eleven löser uppgiften fel eller löser bara delar av uppgiften. | • Eleven upptäcker några av de viktiga delarna av problemet.<br>• Eleven visar några av stegen för hur den löser problemet, men strategin är inte tydlig. | • Eleven förklarar lite om *vad* den gjorde eller *varför* den gjorde det, men inte båda.<br>• Om eleven ritar en figur, kan den förklara lite om den skriftligt. |
| • Eleven försöker att | • Eleven kan nästan | • Eleven skriver eller |

| | | |
|---|---|---|
| lösa uppgiften, men förstår den inte. | inte hitta några viktiga delar av uppgiften.<br>• Eleven använder en strategi som inte är rimlig.<br>• Eleven visar nästan inga steg för hur den löser uppgiften.<br>• Eleven tar ibland med onödig information. | ritar något som inte stämmer med svaret.<br>• Eleven skriver otydliga lösningar. |
| • Eleven försöker inte ens att lösa uppgiften. | • Eleven har ingen plan för hur uppgiften ska lösas. | • Eleven förklarar inget skriftligt. |