

Rapport för filosofie kandidatexamen, Sundsvall 2015

## **GAUSS – MATEMATIKEN FÖR 200 ÅR SEDAN**

**Eva-Karin Lindström**

Handledare:  
Professor Cornelia Schiebold

Avdelningen för Ämnesdidaktik och Matematik  
Mittuniversitetet, 851 70 Sundsvall, Sverige



**Mittuniversitetet**  
MID SWEDEN UNIVERSITY

Rapport som med tillstånd av Mittuniversitetet i Sundsvall framläggs till offentlig granskning för avläggande av filosofie kandidatexamen måndag 9 februari, 15.15 i sal O111, Mittuniversitetet Sundsvall.

## **GAUSS – MATEMATIKEN FÖR 200 ÅR SEDAN**

**Eva-Karin Lindström**

© Eva-Karin Lindström, 2015

Avdelningen för Ämnesdidaktik och Matematik  
Mittuniversitetet, 851 70 Sundsvall  
Sverige

## SAMMANFATTNING

Det här arbetet behandlar en del av Carl Friedrich Gauss livsverk. En historisk bakgrund om vetenskap ges från Euklides Elementa och om vetenskap från 1500–1800-talet. En inblick i Gauss barndom och ungdom samt hans liv och skolning, och vidare hans universitetstid beskrivs där fokus läggs på en 17-siders regelbunden månghörning Gauss konstruerade utifrån Euklides teorier i Elementa. Gauss doktorsavhandling om Algebrans fundamentalsats från 1799 och dess bevis går igenom. Därefter följer en beskrivning om Gauss matematiska teorier inom komplex analys och hans geometriska tolkning om det komplexa talplanet; Talteorin – verket Arismetiska Undersökningar och dess sju kapitel diskuteras. Numerisk matematik och astronomiska beräkningar beskrivs som minsta kvadratmetoden och statistik; Vidare behandlas några viktiga resultat Gauss kom fram till om differentialgeometri och därefter beskrivs den icke-euklidiska geometrin som uppstod på 1800-talet. Teorin om vektorfältanalys, divergenssatsen behandlas och tillämpas. Med fokus på matematik beskrivs Gauss arbete med tillämpningar och teorier inom fysik, astronomi och geodesi samt kristallografi.

## INNEHÅLL

<b>SAMMANFATTNING</b> . . . . .	iii
<b>1. INLEDNING</b> . . . . .	1
1.1. BAKGRUND . . . . .	1
1.2. SYFTE . . . . .	2
1.3. OMFATTNING . . . . .	2
<b>2. GAUSS TID TAR VID</b> . . . . .	4
2.1. HISTORISK BAKGRUND . . . . .	4
2.2. GAUSS UPPVÄXT OCH SKOLNING . . . . .	5
<b>3. UNIVERSITETSTIDEN</b> . . . . .	7
3.1. MATEMATIK SOM FÖRNYAS EFTER 2000 ÅR AV TYSTNAD . . . . .	7
3.2. GAUSS SATS OM REGELBUNDNA $n$ -HÖRNINGAR . . . . .	8
<b>4. GAUSS DOKTORSAVHANDLING (1799)</b> . . . . .	10
4.1. HELMSTÄDT UNIVERSITET . . . . .	10
4.2. GAUSS UPPSTÄLLNING AV ALGEBRANS FUNDAMENTALSATS . . . . .	11
4.3. GAUSS BEVIS FÖR ALGEBRANS FUNDAMENTALSATS . . . . .	12
<b>5. KOMPLEX ANALYS</b> . . . . .	19
5.1. KOMPLEXA TAL . . . . .	19
5.2. CAUCHYS INTEGRALSATS . . . . .	19
<b>6. DISQUISITIONES ARITHMETICAE (1801)</b> . . . . .	23
6.1. TALTEORI I ALLMÄNHET . . . . .	23
6.2. GAUSS INFÖR KONGRUENSBEGREPP, EN INLEDNING TILL VÅR TIDS MODERNA TALTEORI . . . . .	25
6.2.1. <i>I. Kongruenta tal i allmänhet</i> . . . . .	25
6.2.2. <i>II. Kongruenta tal av första grad</i> . . . . .	26
6.2.3. <i>III. Rester av potenser</i> . . . . .	27
6.2.4. <i>IV. Kongruens av andra graden</i> . . . . .	28
6.2.5. <i>V–VII. Triangeltal, regelbundna månghörningar mm.</i> . . . . .	30
6.3. GAUSSISKA HELTAL OCH GAUSSISKA PRIMTAL . . . . .	32
6.4. SAMMANFATTNINGSVIS OM <i>Disquisitiones Arithmeticae</i> . . . . .	34

6.5.	BERNHARD RIEMANNS ZETAFUNKTION $\zeta(s)$ OCH FUNKTIONEN $\pi(x)$ .	35
<b>7.</b>	<b>CERES (1801)</b> . . . . .	<b>37</b>
7.1.	EN EMPIRISK FORMEL OM SOLSYSTEMET OCH PLANETEN SOM FATTADES . . . . .	37
7.2.	BANBERÄKNINGAR – ETT EXEMPEL . . . . .	39
7.3.	MINSTAKVADRATMETODEN . . . . .	40
7.3.1.	<i>Minstakvadratmetoden för en rät linje</i> . . . . .	41
7.3.2.	<i>Minstakvadratmetoden för polynom</i> . . . . .	42
7.4.	NORMALFÖRDELNINGEN . . . . .	43
<b>8.</b>	<b>OBSERVATORIET I GÖTTINGEN</b> . . . . .	<b>46</b>
8.1.	GAUSS OCH GÖTTINGENS OBSERVATORIUM . . . . .	46
8.2.	VEKTORFÄLTANALYS . . . . .	49
8.2.1.	<i>Divergenssatsen</i> . . . . .	49
8.2.2.	<i>Divergenssatsen i tillämpning: Ljusflödet ut från en kristall</i> . . .	50
8.3.	GAUSS OCH MILLERS KRISTALLOGRAFI . . . . .	51
<b>9.</b>	<b>GEODESI, KRÖKNINGAR OCH KLASSISK DIFFERENTIAL-GEOMETRI</b> . . . . .	<b>53</b>
9.1.	GEOMETRINS UTVECKLING . . . . .	53
9.2.	GAUSS GEODETISKA MÄTNINGAR . . . . .	53
9.3.	ALLMÄNNA UNDERSÖKNINGAR AV KRÖKTA YTOR . . . . .	56
9.3.1.	<i>En ytas krökning</i> . . . . .	57
9.3.2.	<i>En geodetisk triangel</i> . . . . .	58
9.3.3.	<i>Vinkeln mellan två kurvor på en yta</i> . . . . .	59
9.4.	ICKE-EUKLIDISK GEOMETRI . . . . .	59
9.4.1.	<i>Pionjär inom icke-euklidisk geometri</i> . . . . .	59
9.4.2.	<i>Hyperbolisk och elliptisk geometri</i> . . . . .	60
9.4.3.	<i>Einsteins fjärde dimension i rumtidskontinuum</i> . . . . .	62
<b>10.</b>	<b>DISKUSSION OCH SLUTSATS</b> . . . . .	<b>65</b>
	<b>TACK</b> . . . . .	<b>67</b>
	<b>Bilagor</b>	
<b>A.</b>	<b>KOMPLEXA TAL</b> . . . . .	<b>68</b>
	<b>REFERENSER</b> . . . . .	<b>70</b>



# 1. INLEDNING

## 1.1. Bakgrund

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) var en tysk matematiker, en av historiens största, som redan som barn visade begåvning. Det här arbetet handlar om Gauss och hans livsverk. Arbetet visar också hur matematiken vävts samman i historien och hur Gauss förde samman matematik från mer än 2000 år sedan om Euklides axiom och lyckades skapa något storartat med regelbundna månghörningar. Arbetet tar upp exempel om hur Gauss teorier används i vår tid 200 år senare. Hans matematiska teorier används idag inom till exempel modern astrofysik och avancerade beräkningar med datorer för planeter, Nära-jorden objekt (Near Earth Object) och satelliter samt rymdsonders banor [1, 2, 3].

Gauss publicerade inte alltid sina arbeten, han var något av en perfektionist och ville publicera verk med strikt bevisföring, ett arv han lämnat till eftervärlden om hur vetenskap kan utvecklas, formuleras och publiceras. Han kunde vara hård med kritik mot andra forskare av sin tid och tyckte inte om metoder där de mer diskuterade fram vetenskapliga bevis genom retorik och filosofi, eller genom att de antog visa delar av bevisen istället för att använda mer strikt och konkret bevisföring. Något av sin kritiska förmåga visar Gauss prov på i sin doktorsavhandling om algebrans fundamentalsats från år 1799 och arbete bestod två tredjedelar av kritik av d’Alemberts bevis från 1746, Leonard Eulers bevis från 1749 och Lagranges bevis från 1772 [4].

Brevväxling i Gauss vänkrets vittnar om en annan sida av Gauss. Wolfgang Bolyai (1775–1856), som var Gauss kurskamrat och nära vän sedan universitetstiden, skrev i ett brev till Baron Simon Kemény 1796 att Gauss var mycket tillbakadragen och inte alls talför, att de kunde ta promenader i timmar och inte säga ett ljud där båda gick i sina egna tankar, och att man inte alltid vid första anblick förstod vilket geni Gauss var eftersom ha var så ödmjuk. Wolfgang Bolyai skrev att det var synd att det gick år innan han kunde få något ur denna “tysta bok utan titel”, att han inte genast förstod vilket storartat geni Gauss var. Det är vår passion för matematik som binder oss samman skrev Bolyai i brevet. Gauss hade å andra sidan sagt om sin vän Wolfgang Bolyai att denne var den ende som förstod hans perspektiv på matematikens fundament [2, ss. 23–48].

Genom Gauss dagboksanteckningar och brevväxling med andra forskare och vetenskapsmän av hans tid lär man sig att förstå att hans kapacitet inom vetenskap var enorm och mycket omfattande. Gauss förde matematisk dagbok redan från 18 års ålder. Dagböcker och också brevväxlingar han förde med andra forskare är sparade för eftervärlden, vilket både är källmaterial och samtidigt visar något om vem Gauss var och på vilket sätt Gauss kom fram till sina teorier inom matematik och andra vetenskaper. Det finns källmaterial sparat om vilka böcker han lånade på Universitetsbiblioteket i Göttingen till och med. År 1795 lånade Gauss till exempel en bok om svensk grammatik av Sahlström, och år 1796 lånade han boken *Resan till heligt land* av Hasselquist. Tydligt lärde han sig svenska också bland de många språk han läste in. Gauss var språkbegåvad och hans avhandlingar och verk är ofta skrivna på latin. Inte alla arbeten har blivit översatta till moderna språk [2, ss. 398–399] [2, ss. 496–484].

## 1.2. Syfte

Syftet med arbetet är att visa hur matematikens utveckling såg ut för 200 år sedan och arbetet riktar in sig på Carl Friedrich Gauss, en matematiker vars namn man ofta träffar på som universitetsstuderande matematiker. Gauss insatser inom matematiken återfinns i praktiskt taget all modern matematik och man finner Gauss namn inom analys, algebra och komplex analys samt diskret matematik och talteori; numerisk analys, statistik och geometri samt differentialgeometri och icke-euklidisk geometri. Under sin livstid ägnade sig Gauss vidare åt tillämpad fysik och astronomi samt också åt geodesi och kristallografi.

## 1.3. Omfattning

Arbetet behandlar inte allt Gauss skapat utan är koncentrerat på vissa delar av Gauss livsverk inom matematik från slutet av 1700-talet till mitten av 1800-talet. Arbetet innehåller också delar av Gauss bidrag till astronomin och den geologiska vetenskapen.

Inledningsvis i kapitel två beskrivs Gauss bakgrund och att han tidigt i livet visade prov på att vara ett begåvat barn. En historisk bakgrund om vetenskapen och organisationer som skapats inom vetenskap ca 100–200 år innan Gauss tid beskrivs samt några vetenskapsmän som inspirerat Gauss. I kapitel tre beskrivs Euklides Elementa och närmare bestämt de regelbundna månghörningar som går att konstruera med endast passare och ogradrad linjal enligt viss ordning. Därefter beskrivs Gauss universitetstid där han lyckades konstruera en regelbunden 17-hörning enligt Euklides metod. En bedrift ingen lyckats med på 2000 år. Gauss skapade en matematisk teori om regelbundna  $n$ -hörningar vilket han visade senare år 1801 i verket Aritmetiska Undersökningar. Kapitel fyra beskriver Gauss doktorsavhandling från året 1799 där han ger ett bevis för Algebrans fundamentalsats, ett bevis som anses vara det första i sitt slag. Kapitel fem tar upp den komplexa analysen som var något luddig och mystisk innan Gauss fastställde räkneoperationer på ett praktiskt sätt och visade hur man kunde åskådliggöra komplexa tal i ett komplext plan. Kapitel sex går vidare till Gauss verk *Disquisitiones arithmeticae*, det vill säga verket Aritmetiska undersökningar om talteorin som Gauss publicerade 1801. Det var ett verk Gauss publicerade endast två år efter sin doktorsavhandling.

Kapitel sju beskriver tiden när Gauss fick upp intresset för astronomi, hur han lyckades beräkna omloppsbanan för miniplaneten Ceres och andra himlakroppar, samt hur han därifrån fick skapat mer omfattande teorier med minstakvadratmetoden, vilken han upptäckt i redan unga år när han ägnat sig åt geodetiska undersökningar. Kapitlet beskriver metod och teori för kägelsnitt, ellipser och också minstakvadratmetoden för att få fram linjära, kvadratiska och kubiska ekvationer från experimentell mätdata.

Kapitel åtta beskriver tiden Gauss började arbeta som professor och föreståndare för Göttingen observatorium och att han började intressera sig för fysikalisk matematik och dess tillämpningar inom till exempel vektorfältanalys. Vidare ägnade han sig åt fysik tillsammans med professor W. E. Weber (1804–1891) och en kort tid också åt kristallografi.

I kapitel nio beskrivs Gauss insats till differentialgeometrin och de krökta ytorna. Hur han tillbringade tid ute i fält med att utföra geodetiska mätningar, och hur han därifrån fick skapat teorier till differentialgeometrin vilket i sin tur blev steget in i



den icke-euklidiska geometrin. Gauss var med och befäste teorin om den hyperboliska geometrin. Gauss elev Bernhard Riemann (1826–1866) skapade i sin tur teorin om den elliptiska geometrin. Kort beskrivs även Albert Einsteins geometriska vy i fjärde dimension i rumtidskontinuum. Einstein hade blivit inspirerad av Riemanns arbete när han skapade den allmänna relativitetsteorin.

## 2. GAUSS TID TAR VID

### 2.1. Historisk bakgrund

Ett till två århundraden innan Carl Friedrich Gauss föddes var en tid där vetenskapen fick kämpa mot kyrkans dogmism och den världsåskådning som religionen präglade samhället med. Den katolska kyrkan hade stor makt i samhället. På 1500–1600-talet ägnade sig få människor åt vetenskap, det fanns intressegrupper men inte många hade yrke som forskare. De som ägnade sig åt vetenskap spände sitt intresse över ett brett fält. Många välbärgade medborgare och adelsmän som var privilegierade att kunna ägna sig åt studier kunde ha intresset av vetenskaper eller vara mecenater åt befintliga vetenskapsmän.

Den första organisation som ägnade sig åt vetenskap kan ha varit *Accademia Secretorum Naturarum* som skapades av Giambattista della Porta år 1560 i Neapel. Han publicerade en bok, *Magia Naturalis*, och organisationens medlemmar brevväxlade och använde kodat chiffer i breven. Kyrkan blev misstänksam och anklagade della Porta för svartkonst varvid akademien fick stängas. *Accademia Dei Lincei* (Lodjursögats akademi) följde och den skapades i Rom 1603. Syftet med akademien var att finna nya vetenskapliga upptäckter och publicera dem för världen. Akademiens symbol var en lodjursklo som till döds rev sönder *Cerberus*, en varelse som var en hund med flera huvuden och som hade en ormsvans, vilket symboliserade vetenskapens kamp mot okunskap. Organisationen växte och della Porta och också Galileo blev medlemmar. *Accademia Dei Lincei* publicerade två av Galileos verk och brev finns sparade där man ser att Galileo använde lodjursögats symbol i brev och på titelsidan av sina böcker. Galileos skapelse, det optiska instrumentet gavs namnet *Telescope* år 1611 vid ett möte i *Accademia Dei Lincei*. Galileos teleskop var något skrämmande för en del av medlemmarna och en del av dem vägrade att ens se in i det optiska instrumentet då det kunde gå emot deras religiösa eller filosofiska tro. Studier i astronomi och fysik fick stå tillbaka och blev allt för farligt efter att kyrkan sagt sitt och Galileo blev dömd 1630 av den katolska kyrkans domstol och inkquisitionen. *Accademia Dei Lincei* stängdes år 1630 [1, s. 498].

Två stora astronomer från 1500–1600-talet värda att nämnas är dansken Tycho Brahe (1546–1601) och tysken Johannes Kepler (1571–1630). Brahe lyckades göra korrekta iakttagelser av himlakroppar och deras lägen, observationer som Kepler sedan tog fasta på när han skapade teorier. Keplers undersökningar av himlakroppar resulterade i tre fysikaliska lagar vi idag kallar Keplers lagar. Lagarna beskriver egenskaper och relationer om himlakroppars omloppstid, hastighet och position relativt från Solen och återfinns i verket *Harmonice mundi* [1, s. 360] [5, ss. 94–98]. Keplers lagar ser ut som följande:

(1) Solsystemets planeter färdas i elliptiska banor runt Solen, där Solen är belägen i ellipsens ena fokuseringspunkt  $F_1$ . [Det existerar två fokuseringspunkter i en ellips  $F_1$  och  $F_2$ .]

(2) Om vi tänker att det från Solen går en linje  $l$  ut mot ellipsens rand där en planet är belägen, så gäller att när linjen  $l$  svept över ett område under tiden  $t_1$  till  $t_2$ , är områdets yta proportionell mot tiden som gått. [Hastigheten för planeten som har sin omloppsbana i ellipsens rand ökar då planeten har kort avstånd till Solen.]

(3) Om  $t$  är planetens omloppstid och  $a$  är medelavståndet, så gäller att  $\frac{t^2}{a^3} = k$ ,

där  $k$  är en konstant. [Uttrycket menar att konstanten  $k$  har samma värde för samtliga planeter som har sin omloppsbana runt Solen.]

Keplers lagar var något som inspirerade Isaac Newton (1642-1727) och Newton gav bevis för lagarna med hjälp av gravitationsteorin som han publicerade år 1687 i verket *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Newton förklarade därmed planetsystemets dynamik och himlakroppars och jordens rörelse [6, ss. 12–13]. I verket återfinns Newtons tre lagar om mekanik och han bevisar också tröghetsprincipen och den konstanta accelerationens lag. Newton gjorde stora insatser inom astronomi, mekanik och matematik. Inom matematiken utvecklade Newton infinitesimalkalkylen, det vill säga beräkningar om volymer, areor och extremvärdesproblem samt tangent inom differential- och integralkalkylen. Han införde också notationer och beteckningar som medförde att det blev enklare att arbeta med derivata och integraler. Newton visade också sambandet mellan derivator och integraler. Gottfried W. Leibniz (1646–1716) har skapat samma slags matematik om derivata och integraler oberoende av Newton [5, ss. 106–114] [1, ss. 386–402] [s. 127] Karush.

Pierre de Fermat (1601–1665) var en fransk jurist som ägnade sig åt matematik på sin fritid och han är berömd för bland annat två satser som fått hans namn, Fermats lilla och stora sats [7, ss. 36–46].

Renässansen som skapats i Italien och som spred sig till norra Europa, nådde också Frankrike och England. Två organisationer som skapades på 1600-talet var *Royal Society of London*, som grundades runt år 1660, och *L'Académie Royale des Sciences*, som grundades 1666. Deras syfte var att verka för att sprida information bland medlemmar och att få ut information om vetenskap till andra som kunde vara intresserade [1, s. 397].

På 1700-talet utvecklades analysen inom matematik så som till exempel differentialekvationer, infinitesimalkalkylen och variationskalkylen samt teorier för serier och funktioner. Matematiker som levde under 1700-talet och har gjort några stora insatser är bland annat Pierre S. Laplace (1749–1827), Leonard Euler (1707–1783) och Jacob och Johann Bernoulli (1654–1705 respektive 1667–1749) samt vidare Joseph L. Lagrange (1736–1813) [1, ss. 483–489] [1, ss. 539–541] [1, s. 528–536] [5, s. 56].

Den franska matematikern Abraham de Moivre (1667–1754) har vidare fått en formel uppkallad efter sitt namn som handlar om potenser av komplexa tal och formeln heter "de Moivres formel" [8, s. 409] [7, s. 93]. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) tog i sin tur och studerade matematik skapad på 1600–1700-talet av bland andra Euler och Lagrange. Han blev djupt inspirerad av Newton och blev också lärd om Euklides axiom under gymnasietiden [1, ss. 544–551] [2, s. 18].

## 2.2. Gauss uppväxt och skolning

Carl Friedrich Gauss lärde sig att skriva och läsa själv innan han började skolan och redan som ung visade han en unik begåvning i språkinläring och aritmetik. Det var inte självklart att Gauss skulle ägna livet åt forskning och högre skolning. Han kom från en familj av arbetare och bönder som traditionellt inte hade som vana att gå i högre skolor.

Vid sju års ålder, året 1784, började Gauss i *St. Katharines Volksschule* i staden Braunschweig där han fick vara i en klass av storleksordning 200 elever. Klassens lärare hette J. G. Büttner och sägs ha styrt eleverna med hård disciplin. Efter tre

år fick Gauss och de andra eleverna flyttas upp till aritmetikklassen. Det var här som Gauss utmärkte sig med sin matematiska begåvning, bland annat genom att som tioåring bara på ett kort ögonblick lösa en matematisk uppgift att addera ihop de första 100 heltalen och skriva ner summan. Gauss gick fram med sin krittavla och sade: "Liggen se!". Büttner bekräftade att Gauss svar var korrekt och Gauss fick förklara hur han kommit fram till resultatet. Den tioårige Gauss menade att han beräknar alla tal "parvis" så som  $100 + 1$ ,  $99 + 2$ ,  $98 + 3$ , och så vidare där samtliga par av tal gav summan 101. Det blev 50 stycken par allt som allt och således blev resultatet 50 gånger 101 vilket är lika med 5050. Gauss kom således på en formel för värdet av en aritmetisk summa där  $n$ , i detta fall var  $n = 100$ :

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Senare i livet skapade Gauss grunden för vår moderna talteori och införde begrepp och notationer såsom kongruens och definitioner och satser om delbarhet med heltal. Klassläraren J. G. Büttner kom med tiden att förstå att Gauss var ett mycket begåvat barn och han tog sig tid med att beställa mer avancerad matematisk kurslitteratur från Hamburg åt Gauss. Efter några år insåg J. G. Büttner att han personligen inte kunde lära ut mer åt Gauss, att Gauss behövde få mer avancerad undervisning. Gauss genialitet blev uppmärksammas även av staden och samhället där han levde i Braunschweig i det Tysk-Romerska riket. Gauss fick övertalas för att Gauss skulle få vidareutbilda sig teoretiskt i högre skolor. Den man som gav Gauss den möjligheten och som blev Gauss sociala och ekonomiska mentor för vidare studier i gymnasium och universitet samt när Gauss forskarstuderade var ärkehertigen Ferdinand av Braunschweig.

Åren 1792–1795 bekostade Hertigen av Braunschweig den unge Gauss gymnasiestudier på *Caroline College* i Braunschweig. Redan här på gymnasiet år 1795 skapade Gauss minsta kvadratmetoden som han senare publicerade år 1809 i en artikel om astronomi: *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium* (Teorin om Rörelse för Himmelska kroppar runt Solen i Kägelsnitt) där han använder minsta kvadratmetoden för himlakroppars banor. Gauss fick dock dela upptäckten av minstakvadratmetoden med Legendre, som var den som hann publicera teorin först året 1806 och detta helt oberoende av Gauss teori [2, ss. 18–22], [1, ss. 544–551], [9, ss. 870–71].

### 3. UNIVERSITETSTIDEN

#### 3.1. Matematik som förnyas efter 2000 år av tystnad

Ärkehertigen Ferdinand av Braunschweig bekostade vidare Gauss universitetsstudier och Gauss började på universitet i Göttingen år 1795 där han stannade i tre år. Det var inte självklart att Gauss skulle välja matematik som ämne på universitetet. Han var skicklig i klassiska språk och stod i valet om vad han skulle koncentrera sina studier på när han av en händelse året 1796 lyckades konstruera en regelbunden månghörning med 17 hörn. Gauss studerade matematik för professor Abraham Kestner på universitetet men denne visade inte mycket intresse för sin student. När Gauss till exempel presenterade sin upptäckt och menade att han funnit lösningen för den algebraiska ekvationen för en regelbunden 17-månghörning, avfärdade professor Kestner honom och menade att det var omöjligt. Det var upptäckten av den regelbundna månghörningen som fick Gauss att välja matematik som ämne [1, ss. 547–548].

Metoden att konstruera regelbundna månghörningar med endast passare och linjal går tillbaka till den klassiska matematiken i antikens Grekland. Euklides (233–285 f. Kr.) sägs vara författare till verket *Elementa*, vilket är den äldsta grekiska skrift i matematik som finns bevarad. *Elementa* består av tretton böcker och teorierna härstammar från redan etablerad matematik, från äldre källor. Det som gör *Elementa* stor är Euklides sätt att använda postulater, definitioner och axiom. Den första tryckta utgåvan gavs ut år 1482 men inget originalmanuskript finns som kan dateras till Euklides tid. Vatikanen sägs ha den äldsta manuskriptkopian i sitt arkiv [1, ss. 141–144].

I *Elementa* står att läsa om klassisk geometri från Antiken. Bok I, artikel 1 tar till exempel upp liksidiga trianglar och kvadrater och i bok IV., i artiklarna 6, 11 och 15 står att läsa hur man kan rita en kvadrat samt fem-, sex- och femtonhörningar inuti en cirkel. Gyllene snittet framställs också med en konstruktionsmodell med passare och linjal. Vinklar som bisekteras skapar dubbelt så många hörn i regelbundna månghörningar i cirkeln.

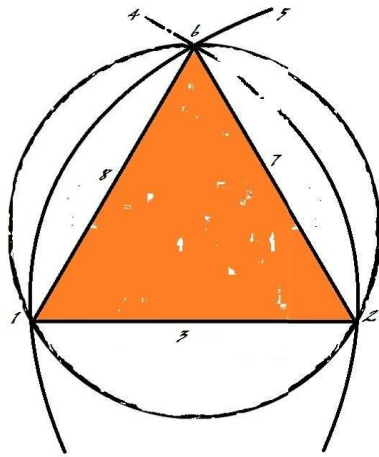
En definition av regelbundna månghörningar i modern mening är att de är konvexa med alla sidor lika i längd och med lika vinklar i hörnen. Om vi ritar in en regelbunden månghörning med  $n$  sidor i en cirkel, kommer vinkeln belägen i cirkelns centrum, mellan två radier till intilliggande hörn ha värdet  $a = \frac{2\pi}{n}$ . Om det är en sexhörning så blir värdet  $a = \frac{\pi}{3}$ . I *Elementa*, IV, artikel 15 står att läsa "Att i en given cirkel inskriva en regelbunden sexhörning". Därefter står hur Euklides vill att man ska gå tillväga för att konstruera en sådan regelbunden  $n$ -hörning. Man använder således inga gradskivor eller andra hjälpmedel utan ritar en cirkel med hjälp av passare och ograderad linjal som enda verktyg [1, ss. 141–144] [10, ss. 256–434]. En tolkning för att skapa en regelbunden sexhörning torde kunna skrivas som:

1. Låt  $G$  vara en cirkel  $K_1$ 's medelpunkt.
2. Dra en diameter  $AD$  genom cirkelns centrum.
3. Med  $D$  som medelpunkt, dra en cirkel  $K_2$  med radie  $DG$ .
4. Den nya cirkeln  $K_2$  skär nu cirkel  $K_1$ 's rand i punkterna  $C$  och  $E$ .

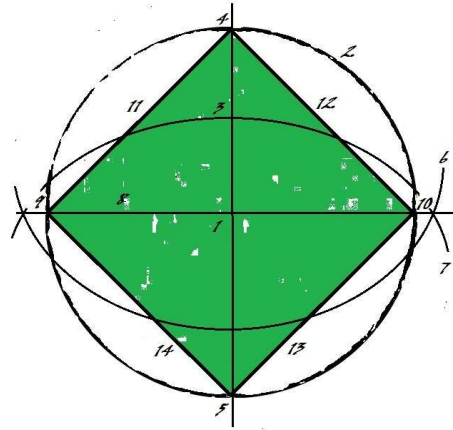
5. Vi ritlar ett streck från punkt  $C$  till mittpunkten  $G$  och förlänger strecket tills vi når cirkel  $K_1$ :s rand i punkt  $F$ .
6. Vi ritlar ett streck från punkt  $E$  till mittpunkten  $G$  och förlänger strecket tills vi når cirkel  $K_1$ :s rand i punkt  $B$ .
7. Punkterna  $A, B, C, D, E, F$  är hörnen i den regelbundna sexhörningen.
8. Vi drar streck från en punkt till dess närmaste punkt och får då sexhörningens sidor så som  $A$  till  $F$ ,  $F$  till  $E$ ,  $E$  till  $D$ ,  $D$  till  $C$ ,  $C$  till  $B$ ,  $B$  till  $A$ .
9. Att i en given cirkel inskriva en regelbunden sexhörning har vi nu gjort (Se figur 1d).

### 3.2. Gauss sats om regelbundna $n$ -hörningar

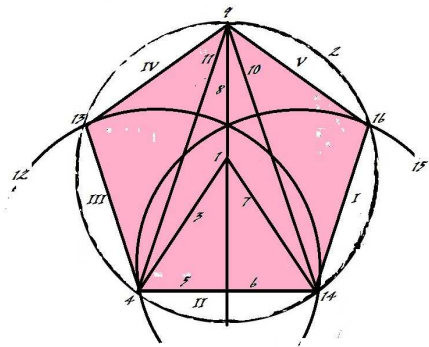
Det finns olika metoder för att konstruera regelbundna månghörningarna. Vilka regelbundna månghörningar som kan konstrueras var en klassisk fråga Antikens matematiker ställde sig och som matematiker studerat i över 2000 år. Den frågan fick sitt svar år 1801 i *Disquisitiones Arithmeticae*. I *Allgemeine Literaturzeitung* år 1796 stod att läsa en kort notis skriven av Gauss där han menade att han funnit en metod att skapa en regelbunden 17-hörning och att han hade för avseende att publicera en teori inom kort som fastställer vilka regelbundna månghörningar som går att skapa [2, ss. 28–30]. I verket *Disquisition Arithmeticae* år 1801 visade Gauss nödvändiga och tillräckliga villkor för vilka regelbundna månghörningar som är konstruerbara med den Euklidiska metoden (Se kapitel 6.2.5).



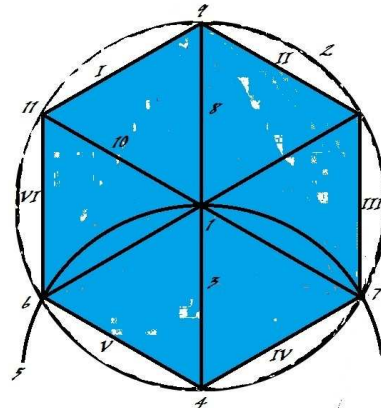
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figur 1.** Exempel på Euklides regelbundna månghörningar ritade med endast passare och ograderad linjal. Numreringen står för ordning man ska rita strecken och kurvorna.

## 4. GAUSS DOKTORSAVHANDLING (1799)

### 4.1. Helmstädt Universitet

Efter tre år på universitetet i Göttingen återvände Gauss år 1789 hem till Braunschweig där han ägnade sig åt att skriva sin doktorsavhandling. Vid den här tiden besökte han ofta biblioteket på universitetet i Helmstädt där han blev bekant med matematikern J. F. Pfaff (1765–1825). De ordnade ett samarbete där Pfaff blev Gauss handledare i forskarstudierna och år 1799 fick Gauss chansen och försvara sin doktorsavhandling på Helmstädts universitet [1, s. 548] [2, ss. 34–39].

Gauss doktorsavhandling 1799 fick den latinska titeln *Demonstratio Nova Theorematis Omnem Functionem Algebraicam Rationalem Integram Unius Variabilis in Factores Reales Primi vel Secundi Gradus Resolvi Posse*, auctore Carolo Frederico Gauss, Helmstadii, apud C. G. Fleckeisen, 1799. Översatt till svenska torde titeln betyda “Ett nytt bevis för satsen att varje rationell algebraisk integralfunktion i en variabel kan lösas till reella faktorer av första eller andra grad”. Vid den här tiden i slutet av 1700-talet när Gauss skrev sin avhandling så var inte begreppet komplex analys fastställt. De komplexa talen och det komplexa talplanet hade Gauss ännu inte åskådliggjort. Gauss skapade tre bevis till under sitt liv till Algebrans fundamental-sats. I det tredje beviset visar Gauss till exempel att han använder en metod som påminner om Cauchys integralsats, en sats vi kan göra oss bekanta med inom komplex analys. Gauss skapade oberoende av Cauchy en teori för Cauchys integralsats, men han publicerade inte alltid sina teorier, vilket blev fallet med den här satsen. Man fann efter hans bortgång några viktiga resultat i hans samling av opublicerade verk. Det fjärde beviset har en likande bevismetod som det första beviset, men tillåter komplexa tal [8, ss. 598–599] [1, s. 548] [7, s.97].

Matematiker hade ägnat 1500–1700-talen till att undersöka kvadratroten ur negativa tal. Matematikern Cardano Girolamo skrev till exempel redan på 1500-talet om negativa rötter i verket *Ars Magna*. Han gav de negativa talen i kvadratrot namnet *numeri ficti* och använde det latinska ordet *meno* för negativa tal. Girolamo fann lösningen för ekvationen  $x^2 - 10x + 40 = 0$ , så som  $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$  och  $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$ . Han menade att han funnit summan  $x_1 + x_2 = 10$  och produkten  $x_1x_2 = 40$  av  $x_1$  och  $x_2$ . Närhelst matematiker fick negativa tal i kvadratrötter, ansågs talen vara något mystifierade och luddiga och som inte gick att förklara korrekt. Diskussionen om de negativa rötterna pågick in på 1800-talet [10, s. 704] [7, s. 92].

Gauss var den som slutligen tog steget att skapa en metod och fastställa hur de komplexa talen skulle skrivas, en notation vi använder än idag. Titeln i Gauss doktorsavhandling, och delmeningen “faktorer av första eller andra grad” visar att Gauss begränsade sitt arbete till att gälla polynom med reella koefficienter [8, ss. 598–599], [4, ss. 1–25].

Gauss doktorsavhandling 1799 tog upp det första strikta beviset för algebrans fundamental-sats. Endast en tredjedel av Gauss doktorsavhandling tar upp beviset för satsen. Två tredjedelar ägnar Gauss åt att ge kritik åt tidigare försök med bevis skapade av andra matematiker så som d’Alembert, Bougainville och Euler, samt Foncentex och Lagrange. Gauss skriver också i början av avhandlingen om vikten av stringens inom matematik och förklarar vidden med korrekt bevisföring. Han menar att läroböcker och kompendier är rent av oläsbara och ofullkomliga, att det består av origoröst tänkande vad det gäller algebrans fundamental-sats [4, ss. 1–25].



I ett brev till sin kurskamrat och vän Wolfgang Bolyai skriver Gauss den 16 december 1799 att de som skrivit läroböcker i ämnet inte alls kommer bli glada på honom för hans hårda kritik. Han skriver att avhandlingen är tryckt och har bekostats av Hertigen [av Braunschweig] samt vilken titel han valt. I brevet till sin vän nämner Gauss en preussisk officer som var medlem i Berlins vetenskapliga Akademi, general G. F. von Tempelhoff, som var en av de som skrivit ett kompendium. Gauss skriver att general von Tempelhoff sagt om hans avhandling att "Gauss var hopplös matematiker. Han ger inte efter en tvärhand mark. Han har kämpat tappert och erövrat hela slagfältet" [2, ss. 35–36].

## 4.2. Gauss uppställning av algebrans fundamentalsats

Algebrans fundamentalsats är en existenssats och den förklarar således inte metoden med vilken man kan bestämma rötter till en ekvation, utan den påvisar att det existerar nollställen. Med modernt språk visar jag här hur Gauss ställde upp algebrans fundamentalsats och beviset i doktorsavhandlingen år 1799 [4]:

Om  $z = x + iy$  är ett komplext tal kan polynomekvationen med grad  $m$ , det vill säga:

$$z^m + A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} + \dots + A_{m-1} z + A_m = 0, \quad (4.1)$$

separeras till reella och imaginära komponenter, säg  $P(x, y) = 0$  och  $Q(x, y) = 0$  sådana att:

$$P(x, y) + iQ(x, y) = 0, \quad (4.2)$$

Om vi har en cirkel med centrum  $C$  i origo, existerar det  $2m$  punkter på cirkelns rand där  $P(x, y) = 0$ . Vidare existerar det  $2m$  punkter för  $Q(x, y) = 0$  som är belägna mellan de  $2m$  punkterna där  $P(x, y) = 0$ .

Summan  $S$  av koefficienterna i ekvation (4.1) blir då:

$$S = A_1 + A_2 + \dots + A_{m-1} + A_m > 0 \quad (4.3)$$

Gauss begränsar sig till ekvationer där summan  $S$  ska vara positivt [4, s. 20]. Om  $R$  är cirkelns radie gäller vidare att:

$$R > 1 \text{ och } R > S\sqrt{2}. \quad (4.4)$$

[Gauss menar således att  $R$  skall väljas tillräckligt stor för att resonemanget som följer ska gälla].

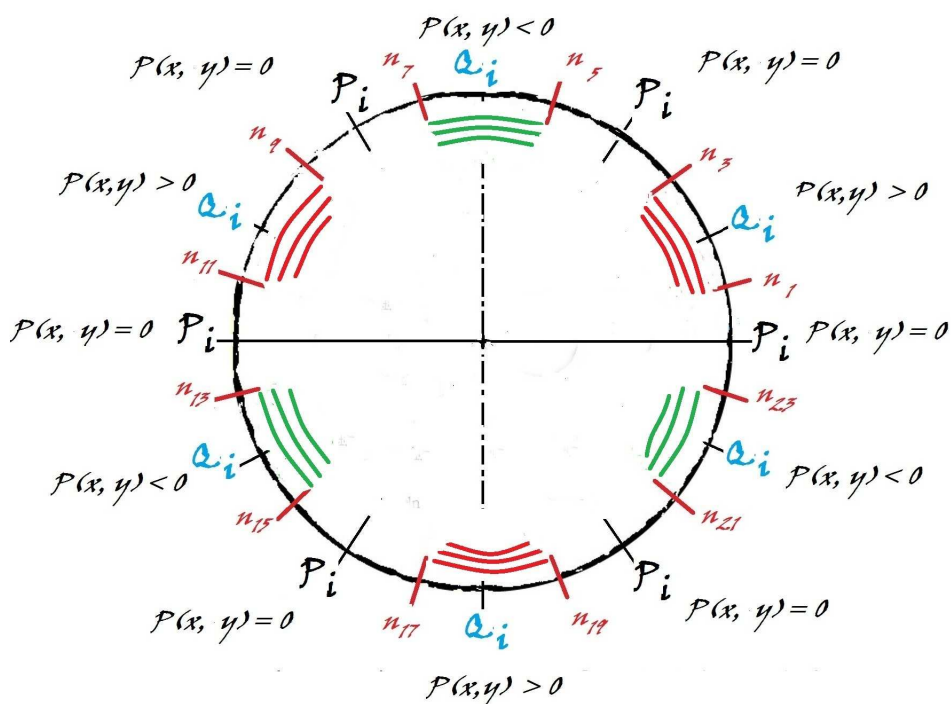
Låt  $n_1$  vara en intervallpunkt belägen på cirkelns rand vid den polära vinkeln  $\phi_1 = \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{4}$ . På samma sätt kan intervallpunkterna  $n_3$  och  $n_5$  vara belägna vid de polära vinklarna  $\phi_3 = \frac{3}{m} \cdot \frac{\pi}{4}$  respektive  $\phi_5 = \frac{5}{m} \cdot \frac{\pi}{4}$ . Samma gäller för intervallpunkten  $n_{(8m-1)}$  som är belägen vid  $\phi_{8m-1} = \frac{8m-1}{m} \cdot \frac{\pi}{4}$ . Vi får således intervallpunkterna:

$$n_1, n_3, n_5, \dots, n_{(8m-1)}, \quad (4.5)$$

vilka är fördelade på lika avstånd från varandra runt cirkelns rand.

Kurvan  $P(x, y) = 0$  kommer att skära cirkeln i en annan punkt,  $p_0$  som hamnar approximativt mellan intervallpunkterna  $n_{(8m-1)}$  och  $n_1$  där  $p_0 \in S_P$ , och  $S_P = \{p_0, p_2, p_4, \dots\}$ . Punkterna  $p_i \in S_P$  kommer alla att hamna approximativt inom intervallen  $[n_3; n_5], [n_7; n_9], [n_{11}; n_{13}], \dots$ . Således finns  $2m$  punkter i  $S_P$  runt cirkeln

rand. På samma sätt kommer punkterna  $q_i$  för vilka  $Q(x, y) = 0$  att hamna inom intervallen  $[n_1; n_3], [n_5; n_7], [n_9; n_{11}], \dots$  där  $S_Q = \{q_1, q_3, q_5, \dots\}$ . Dess antal är också  $2m$  punkter runt cirkelns rand. Därmed kommer  $4m$  punkter fås på cirkelns rand när  $P(x, y) = 0$  och  $Q(x, y) = 0$  (Se figur 2).



Figur 2. Exempel för  $m = 3$ . Beteckningen  $m$  står för polynomets grad.

### 4.3. Gauss bevis för Algebrans fundamentalsats

Gauss delade upp beviset för satsen i flera steg:

1. I del (I) visar Gauss i vilka intervall på cirkelns rand som det kan existera nollställen för kurvan  $P(x, y) = 0$ .
2. Gauss visar i (II) att det endast kan existera ett nollställe mellan varje intervall för  $P(x, y) = 0$ .
3. I del (III) av beviset drar Gauss ut samma riktlinjer som i steg I och II, men för  $Q(x, y) = 0$ .
4. I nästa steg visar Gauss att kurvorna  $P(x, y) = 0$  och  $Q(x, y) = 0$  vid varje  $p_i$  och  $q_i$  skär cirkeln och inte bara tangerar den.
5. I det här steget i beviset visar Gauss att kurvorna  $P(x, y) = 0$  som gått in i punkterna  $p_i$  med jämna intervall, borde parvis sammanbindas med andra

kurvor från  $P(x, y) = 0$  inne i cirkeln, och att kurvorna  $Q(x, y) = 0$  som gått in i punkterna  $q_i$  med ojämna intervall, borde parvis sammanbindas med andra kurvor från  $Q(x, y) = 0$  inne i cirkeln.

6. Härfter visar Gauss att de nu parvis sammansatta kurvor  $P(x, y) = 0$  och de parvis sammansatta kurvor  $Q(x, y) = 0$  måste skapa skärningspunkter mellan sig inne i cirkeln, och därmed bildas nollställen till den komplexa funktionen  $P(x, y) + iQ(x, y)$ .
7. Slutligen i det sista steget säger Gauss att beviset påvisar att inte en, utan  $m$  stycken skärningspunkter måste bildas och att kurvorna skär i rät vinkel vid nollställena. Vidare menar Gauss att han valt att skapa ett geometriskt bevis för Algebrans fundamentalsats eftersom beviset blir mindre abstrakt och mer åskådliggjort, men att beviset kan visas även med analytiska metoder.
8. Gauss skriver kort i slutet av verket hur ett analytiskt bevis kan se ut. Vidare uppmärksammar Gauss en mindre lucka i beviset, om huruvida kurvorna verkligen går in i cirkeln och ut igen, att inget bevis ger han för det men kan, om möjligt skapa ett sådant.

Gauss bevis om Algebrans fundamentalsats, i hans doktorsavhandling år 1799 kan beskrivas som följande:<sup>1</sup>

I. Vid  $n_1$  gäller att  $m\phi = \frac{\pi}{4}$  och därför blir:

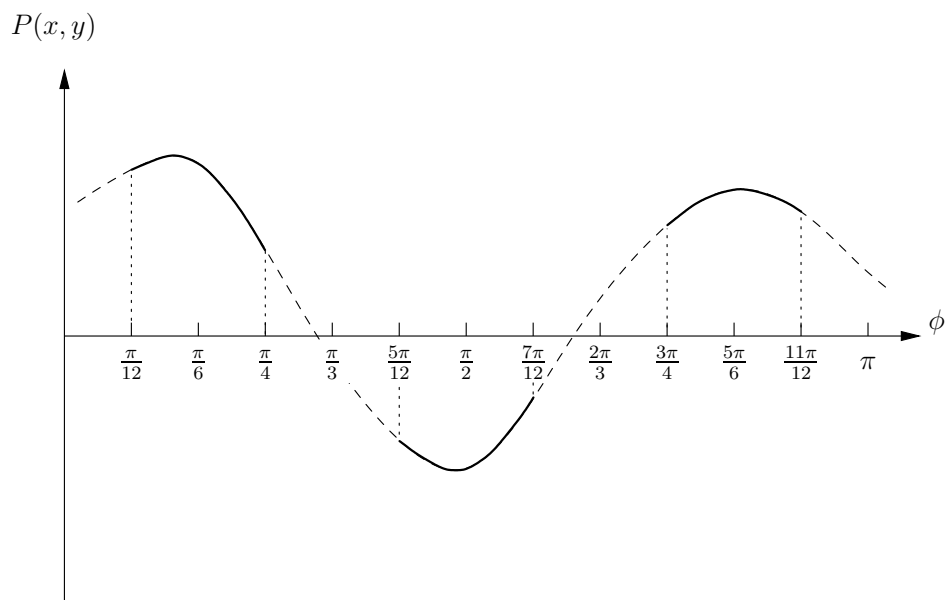
$$P(x, y) = R^{m-1} \left( \frac{R}{\sqrt{2}} + A_1 \sin(m-1)\phi + \frac{A_2}{R} \sin(m-2)\phi + \dots + \frac{A_{m-1}}{R^{m-2}} \sin \phi \right) \quad (4.6)$$

Summan  $A_1 \sin(m-1)\phi + \frac{A_2}{R} \sin(m-2)\phi + \dots + \frac{A_{m-1}}{R^{m-2}} \sin \phi$  kan aldrig vara större än  $S$  och måste således vara mindre än  $R \frac{1}{\sqrt{2}}$  enligt villkoren i ekvation (4.4). Således är värdet för  $P(x, y)$  vid  $n_1$  positivt. Följaktligen kommer  $P(x, y) > 0$  för  $\frac{\pi}{4} \leq m\phi \leq \frac{3\pi}{4}$ , det vill säga i intervallen  $n_1$  till  $n_3$ . På samma sätt gäller  $P(x, y) > 0$  i intervallet  $n_9$  till  $n_{11}$  samt generellt sett från  $n_{8k+1}$  till  $n_{8k+3}$ , där  $k$  är ett heltal (Se figur 3).

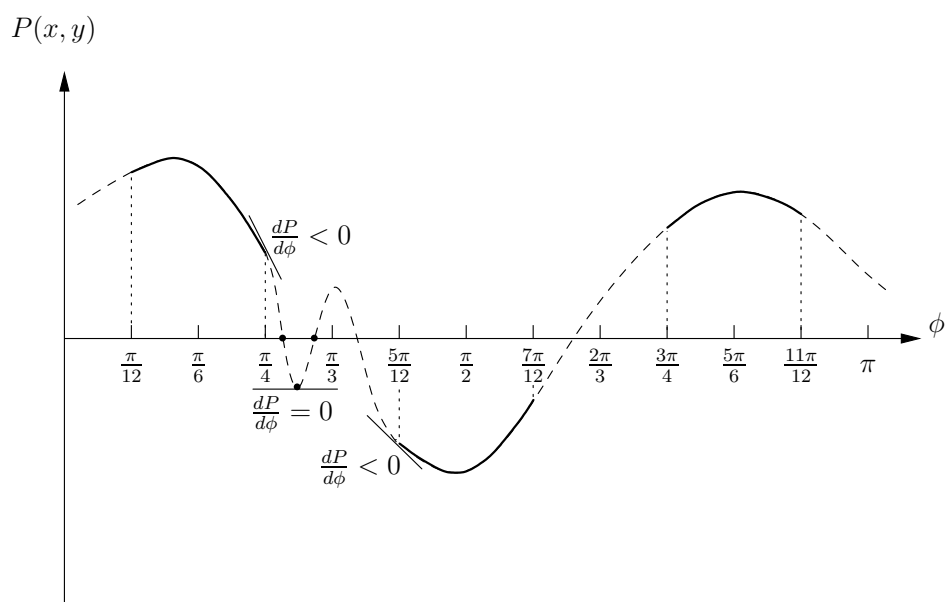
Funktionen  $P(x, y)$  kommer att anta negativa värden i intervallen  $[n_5; n_7]$ ,  $[n_{13}; n_{15}]$ ,  $\dots$ ,  $[n_{8k+5}; n_{8k+7}]$ . Vidare gäller att eftersom  $P(x, y)$  är positiv vid  $n_3$  men negativ vid  $n_5$ , så kommer  $P(x, y) = 0$  någonstans i intervallen  $[n_3; n_5]$ ,  $[n_7; n_9]$ ,  $[n_{11}; n_{13}]$ ,  $\dots$ ,  $[n_{8m-1}; n_1]$ . Det kommer således existera  $2m$  punkter där  $P(x, y) = 0$  på cirkelns rand.

II. Det existerar inga andra punkter för  $P(x, y) = 0$  som har egenskaper beskrivan i (I) utom de här  $2m$  punkterna. Om de existerat sådana punkter, säg  $t_i$  och eftersom de inte kan existera i intervallen  $[n_3; n_5]$ ,  $[n_7; n_9]$ ,  $[n_{11}; n_{13}]$ ,  $\dots$ , så måste de existera i intervallen  $[n_1; n_3]$ ,  $[n_5; n_7]$ ,  $[n_9; n_{11}]$ ,  $\dots$ , vilket då skulle ge mer än en punkt i varje intervall. I sådant fall skulle  $\frac{dP(x, y)}{d\phi} = 0$  någonstans mellan punkterna  $t_i$  och  $p_i$  (Se figur 4).

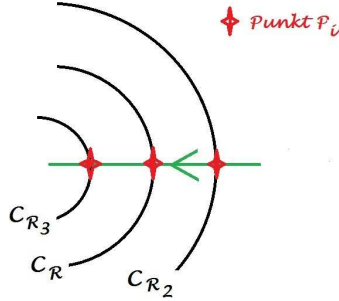
<sup>1</sup>Jag har här förklarat Gauss uppställning, påstående och bevis med egen notation. Vidare har jag inskrivit punkt  $p_0$  i beviset nedan med börjar i vinkel  $\alpha = 0$  istället för som i Gauss bevis där  $p_i$  börjar i vinkel  $\alpha = \pi$ . På Gauss tid skrev  $x$ -axeln i en enhetscirkel oftast med pil på vänster. I beviset nedan är  $x$ -axelns riktning tänkt åt höger, så som vi oftast skriver den idag.



**Figur 3.** Graf som visar intervall då  $P(\phi) < 0$  samt när  $P(\phi) > 0$ , vilket visas med heldragna linjer i grafen.



**Figur 4.** Graf som visar Gauss motbevis att ingen horisontell tangent kan existera omkring  $\phi = \frac{\pi}{3}$ .



**Figur 5.** Geometri för beviset att kurvan  $P(x, y) = 0$  inte tangerar cirkeln med radie  $R$

Men

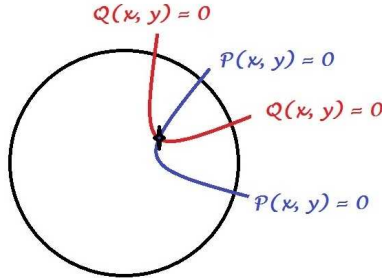
$$\frac{dP(x, y)}{d\phi} = mR^{m-2} \left( R \cos m\phi + \frac{A_1(m-1)}{m} \cos(m-1)\phi + \dots \right),$$

där  $\cos m\phi$  är negativt inom intervallet  $[n_3; n_5]$ , positivt inom intervallet  $[n_7; n_9]$  samt negativt i intervallet  $[n_{11}; n_{13}]$ . Således kan inte  $\frac{dP(x, y)}{d\phi} = 0$  för dessa intervall, och därmed kan ingen punkt  $t_i$  existera.

III. På samma sätt som i (I) kan man visa att  $Q(x, y)$  har negativt värde i intervallen  $[n_3; n_5]$ ,  $[n_{11}; n_{13}]$ ,  $\dots$ ,  $[n_{8k+3}; n_{8k+5}]$ , samt att  $Q(x, y)$  har positivt värde i intervallen  $[n_7; n_9]$ ,  $[n_{15}; n_{17}]$ ,  $\dots$ ,  $[n_{(8k+7)}; n_{(8k+9)}]$ . Skärningspunkter  $q_i$  med  $Q(x, y) = 0$  uppstår således i intervallen  $[n_1; n_3]$ ,  $[n_7; n_9]$ ,  $\dots$ , det vill säga vid  $2m$  punkter. Derivatans  $\frac{dQ}{d\phi}$  kan således inte vara noll vid några av de här intervallen utom vid  $Q(x, y) = 0$  vid  $2m$  punkter.

IV. Om en till cirkel ritas kring centrum C men med en radie  $R_2 > R$ , där samma kriterier delar upp den större cirkeln, så kan vi se att desto mer  $R_2$  närmar sig  $R$  i värde, desto mer närmar sig punkterna  $p_i$  för  $P(x, y) = 0$  i cirkel med radie  $R$  motsvarande punkter på cirkeln med radie  $R_2$ . Om en cirkel med radie  $R_3$  med  $\frac{R}{\sqrt{2}} < R_3 < R$ , samt  $R_3 > 1$  ritas kring samma centrum C, kommer samma sak ske som för  $R_2$ . Samma gäller för punkterna  $q_i$  där  $Q(x, y) = 0$ . När helst en cirkel med radie  $R$  ritas runt en centrum C, kommer  $2m$  punkter av den första kurvan tillhörande  $P(x, y) = 0$ , och  $2m$  punkter av den andra kurvan tillhörande  $Q(x, y) = 0$  gå in i cirkeln. Om man ökar eller minskar radien  $R$  för cirkeln, har det ingen betydelse. Punkterna  $p_i$  existerar så som beskrivet mellan intervallpunkter, och således skär kurvan  $P(x, y) = 0$  i varje punkt oavsett radiens storlek på cirkeln, det vill säga  $P(x, y) = 0$  kan inte tangera cirkeln med radie  $R$  och därmed riskera att försvinna ut från cirkelområdet (Se figur 5). Samma gäller för  $Q(x, y) = 0$  och punkterna  $q_i$ .

Gauss bevis gick ut på att separera polynomet i ekvation (4.1) till en reell och en imaginär del så som i ekvation (4.2). Han ville visa att mängden av nollställena för funktionerna av två variabler,  $P(x, y) = 0$  respektive  $Q(x, y) = 0$  skär varandra någonstans i cirkeln. Det går till som följande: (1) Cirkelns rand är (för  $m = 3$ ) indelad från punkt 0 till 15 i regelbunden sekvens. (Observera att punkterna i illustration representerar  $p_i$  och  $q_i$ , och inte intervallpunkterna  $n_i$ ). I punkterna  $p_i$  och



### ◆ Nollställe

Figur 6. Geometri för nollställe.

$q_i$  går kurvorna  $P(x, y) = 0$  respektive  $Q(x, y) = 0$  in i cirkeln (Se figur 2). (2) De blå ( $P(x, y) = 0$ ) respektive de röda ( $Q(x, y) = 0$ ) kurvorna som går in i cirkeln, måste också hitta ut från cirkeln. Kurvorna kan varken gå tillbaka i sitt eget spår, baklänges, eller försvinna in i cirkelns område utan måste någonstans vända och gå ut ur cirkeln igen. (3) Det som sker är att en blå kurva som gått in i cirkeln möter en annan blå kurva och de går ut ur cirkeln i varandras spår. Samma för de röda kurvorna, en röd kurva som gått in i cirkeln, möter en annan röd kurva och de går ut ur cirkeln i varandras spår. (4) Således bildas helt nya röda kurvor och nya blå kurvor där de parvis har ordnat sig som hela kurvor som gått in och ut ur cirkeln. (5) Någonstans i cirkelområdet måste de blå och röda kurvorna vidare skära varandra och där de skär varandra bildas en punkt som är polynomets nollställen (Se figur 6).

V. Det existerar många sätt att härleda det faktum att när parvis sammansatta  $P(x, y) = 0$  kurvor, samt parvis sammansatta  $Q(x, y) = 0$  kurvor inträtt inuti cirkeln, så måste det ske en skärning någonstans mellan de olika kurvorna. För att visa att så sker, låt oss rita en cirkel där vi placerar jämna punkter  $S_P = \{p_0, p_2, p_4, p_6, \dots\}$  längs med cirkelns rand motsols, i intervallen  $[n_3; n_5]$ ,  $[n_7; n_9]$ ,  $[n_{11}; n_{13}]$ ,  $\dots$  med start vid  $\alpha = 2\pi$ . I vårt exempel, med  $m = 3$ , blir det  $i = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14$  där punkterna representerar läget där de  $2m$  kurvstyckena  $P(x, y) = 0$  går in i cirkeln. Punkterna  $p_i$  placeras längs med cirkelns rand motsols. Punkterna  $S_Q = \{q_1, q_3, q_5, q_7, \dots\}$  tillhörande de  $2m$  kurvorna där  $Q(x, y) = 0$  placeras från  $\beta = \frac{\pi}{8}$  vid cirkelns rand motsols. De placeras i intervallen  $[n_1; n_3]$ ,  $[n_5; n_7]$ ,  $[n_9; n_{11}]$ ,  $\dots$ , och dessa punkters index är i vårt exempel  $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$ . De representerar läget där kurvan  $Q(x, y) = 0$  går in i cirkeln. Sammanlagt finns nu  $4m - 1$  punkter av  $p_i$  och  $q_i$  runt cirkelns rand på ungefär jämna avstånd från varandra och enligt ovanstående villkor placerade mellan intervallpunkterna  $n_i$ .

Vid punkterna  $p_i$  inträder kurvorna  $P(x, y) = 0$  och vid punkterna  $q_i$  inträder kurvorna  $Q(x, y) = 0$  in i cirkeln med centrum i origo och radie  $R$ . De här algebraiska kurvor varken vända tillbaka i sitt eget spår eller försvinna mot oändligheten inuti cirkeln enligt alla villkor i matematiken. Således kommer varje kurva  $P(x, y) = 0$  som går in i det begränsade området i cirkeln, också gå ut ur cirkeln i någon punkt på randen. Slutsatsen kan dras att varje kurva som gått in i cirkeln i en punkt  $p_i$  jämna nummer, måste någonstans i cirkeln gå samman parvis med

en annan kurva  $P(x, y) = 0$  som gått in i cirkeln i en punkt med jämnt index  $p_j$ ,  $j = 0, 2, 4, \dots, i - 2, i + 2, \dots$ . Likaledes gäller att kurvor  $Q(x, y) = 0$  som gått in i cirkeln, i punkter markerade med ojämna nummer  $q_i$ , måste gå samman parvis med andra kurvor  $Q(x, y) = 0$  som gått in i cirkeln, i punkter markerade med ojämna nummer  $q_j$ ,  $j = 1, 3, 5, \dots, i - 2, i + 2, \dots$

VI. De nu parvis sammansatta kurvorna  $P(x, y) = 0$  samt de parvis sammansatta kurvorna  $Q(x, y) = 0$  måste vidare skära varandra någonstans inne i cirkeln och där de skär, bildas ett nollställe till funktionen. Ett bevis om att de parvis sammansatta kurvorna  $P(x, y) = 0$  och de parvis sammansatta kurvorna  $Q(x, y) = 0$  skär varandra någonstans och bildar nollställe kan illustreras med ett motbevis.

Låt oss anta att det inte sker någon skärning mellan de parvis sammansatta kurvorna  $P(x, y) = 0$  och de parvis sammansatta kurvorna  $Q(x, y) = 0$ . Eftersom  $x$ -axeln är en del av kurvorna  $P(x, y) = 0$  där  $p_0$  är placerad vid  $\alpha = 0$ , så måste kurvan som gått in i punkt  $p_0$  vara parvis sammansatt med en kurva som gått in i en punkt  $p_{2m}$ , det vill säga  $p_6$  i vårt exempel med  $m = 3$ . Kurvan som gått in i punkt  $q_1$  kan därför inte vara parvis sammansatt med en godtycklig kurva som gått in i en punkt med index större än  $i = 2m$ , för då skulle den parvis sammansatta kurvan skära med  $x$ -axeln, vilket leder till motsägelse i beviset.

Om vi antar att kurvan som gått in i punkten  $q_1$  är parvis sammansatt med en kurva som gått in i en punkt, säg  $q_{w_1}$ , då kommer  $w_1 < 2m$ . Liknande, om kurvan som gått in i punkten  $p_2$  är parvis sammansatt med en punkt, säg  $p_{w_2}$ , då kommer  $w_2 < w_1$  för annars skulle kurvan  $p_2 p_{w_2}$  skära kurvan  $q_1 q_{w_1}$ . Generellt sett skulle samtliga parvist sammansatta kurvor följa samma villkor, kurvan som gått in i  $q_3$ , i cirkeln skulle vara parvis sammansatt med en kurva som gått in i cirkeln från punkterna mellan  $p_4$  och  $p_{w_2}$  och så vidare. I så fall är det uppenbart att man till slut når en punkt, säg  $p_h$  där en kurva gått in som är parvis sammanbunden med en punkt  $p_{(h+2)}$ . Kurvan som gått in i punkten  $q_{h+1}$  måste då nödvändigtvis skära den parvis sammansatta kurvorna som går genom punkterna  $p_h$  och  $p_{h+2}$ . Men eftersom en av dessa parvis sammansatta kurvor tillhör  $P(x, y) = 0$ , och de andra parvis sammansatta kurvorna tillhör  $Q(x, y) = 0$ , blir antagandet i beviset motsägelsefullt. Det måste således ske en skärning någonstans mellan de parvis sammansatta kurvorna  $P(x, y) = 0$  och de parvis sammansatta kurvorna  $Q(x, y) = 0$ .

VII. Ovanstående resonemang har sammantaget visat att satsens är bevisad, det vill säga att varje algebraisk rationell hel funktion i en variabel kan lösas till reella faktorer av en eller två grader. Från ovan resultat kan vi förstå att inte endast en utan åtminstone  $m$  skärningar kommer att ske mellan de parvis sammansatta kurvorna  $P(x, y) = 0$  och de parvis sammansatta kurvorna  $Q(x, y) = 0$ . Det kan också bli fallet att den första linjen parvis sammansatt kurva  $P(x, y) = 0$  skärs av flera parvis sammansatta kurvor  $Q(x, y) = 0$  i samma skärningspunkt som skapar ett gemensamt nollställe för kurvorna. I sådana fall kommer funktionen att ha flera likande faktorer i uppdelning.

En skärning där ett nollställe skapats sker vidare alltid i rät vinkel och i fallet där flera kurvor sammanfaller i en skärningspunkt, kommer det finnas lika många parvis sammansatta kurvor  $P(x, y) = 0$  som parvis sammansatta kurvor  $Q(x, y) = 0$  som har sitt läge i detta nollställe.

VIII. Det är inte omöjligt att visa ovan bevis med analytiska metoder istället för en geometrisk metod. Med en geometrisk representation blir resonemanget mer åskådliggjorda och beviset blir mindre abstrakt menar Gauss i en diskussion. Han

ger också förslag på en alternativ metod för beviset med analytisk representation i ett kortare stycke för att låta experter jämföra och utforska parallellerna mellan de två bevisen han skapat. Gauss menar vidare att han var fullt medveten om att han inte bevisat om huruvida en algebraisk kurva verkligen går in i cirkeln och också går ur cirkeln. Han skriver att det verkar allt för självklart. Om någon insisterar ska han ge ett sådant bevis vid ett annat tillfälle.

Gauss gav aldrig ett sådant bevis och det dröjde till 1920-talet innan ett bevis gavs av Alexander Ostrowski i artikeln *Über den ersten und vierten Gaußschen beweis des Fundamental satzes der algebra*. Dock skapade Gauss tre nya bevis för algebrans fundamentalsats åren 1815, 1816 och det sista år 1849 när 50 år passerat.

Gauss tredje bevis om Algebrans fundamentalsats från år 1816 visar spår av den komplexa analysen han arbetade med. Man fann efter Gauss bortgång material i hans anteckningar och dagböcker om en rad med teorier han aldrig publicerat. I det tredje beviset kan man spåra den komplexa analysen Gauss arbetat med. Beviset innehåller ett algebraiskt uttryck med en dubbelintegral. Med ett motsägelsebevis visar Gauss att om ekvationen saknar lösning, så kan man ändra integrationsordningen utan att värdet på integralen förändras. Gauss visar i sitt tredje bevis att olika integrationsordningar ger olika resultat för hans uttryck, och således säger Gauss att minst en rot måste existera. Gauss formulerade om diskussionen till analytiska och reella funktioner vilket fick beviset att se något mystiskt ut, om än att det var logiskt sett korrekt tänkt. Han använde kraftfulla resultat och snygga lösningar inom komplex analys som är välbekanta för oss idag, men i beviset omformulerade till en form matematiker av den tiden kunde förstå [7, s.93] [2, s.457].

I slutet av 1800-talet var den komplexa analysen etablerad nog för att bevis kunde skapas för algebrans fundamentalsats där komplexa rötter tilläts. Gauss hade skapat villkor, notationer och en geometrisk tolkning för de komplexa talen i mitten av 1800-talet och därmed gjort den komplexa matematiken mindre mystisk och luddig [7, ss.92–93] [8, ss. 631–633].



## 5. KOMPLEX ANALYS

### 5.1. Komplexa tal

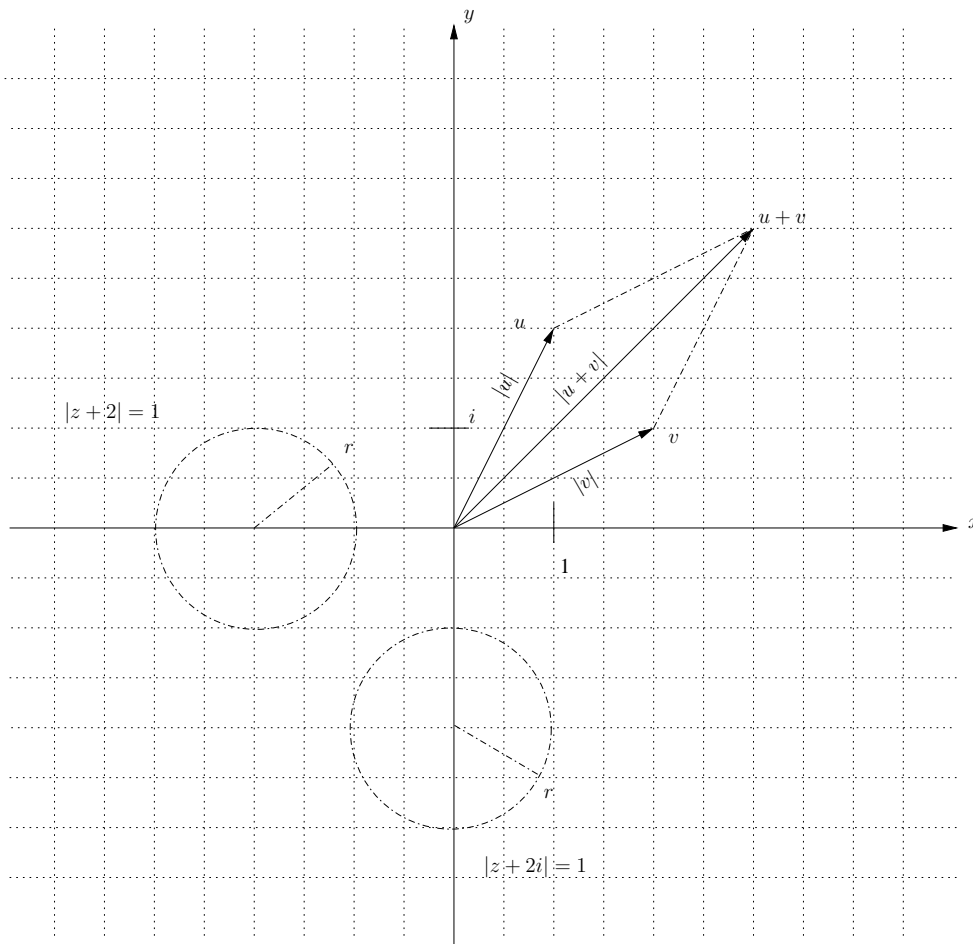
Matematik som ännu inte befäst mark har genom historien diskuterats, förkastats och tagits upp igen. Hit hör den komplexa analysen som tog tid på sig att betraktas som ett område i matematiken. De naturliga talen  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$  utgör grunden för talens historia. Naturliga tal har sedan befäst de hela talen, de rationella talen och de reella talen. De negativa talen och beräkning med dem i ekvationer så som  $x + 1 = 0$  blev ett dilemma inom matematiken och mer motstånd väckte ekvationer av andra grad eller mer, så som till exempel  $x^2 + 1 = 0$ . De negativa talen i andragradsuttryck blev mystifierade och överkliga i sin form när man försökte finna lösning till dem. Det var svårt och se dem geometriskt och skapa sträckor som avståndsberäkningar då man fick en negativ kvadratroten.

Euler införde beteckningen  $i = \sqrt{-1}$  men det blev Gauss som skapade en geometrisk tolkning och åskådliggjorde de komplexa talen i ett koordinatsystem, i ett komplext plan. Han skapade beteckningar, notationer och räkneoperationer för det vi kallar komplex analys. Gauss använde det cartesiska koordinatsystemet som grund där han betecknade  $y$ -axeln som den imaginära axeln och  $x$ -axeln som den reella axeln. Det komplexa talet  $\alpha = x + iy$  kunde här identifieras i en punkt  $p$  som koordinaterna  $(x, y)$ . Den representationen Gauss skapade och publicerade år 1831 gav en geometrisk mening åt operationer samt åt relationer komplexa tal emellan, vilket medförde att den komplexa analysen slutade vara överklig och mystisk. Gauss visade också hur räkneoperationer av de komplexa talen följer aritmetikens räkneoperationer, och skapar liknande men unika regler inom den komplexa analysen [8, ss. 631–633] [7, ss.92–93].

Det komplexa talplanet och den geometriska tolkningen där man använder räkneoperationer med till exempel addition eller subtraktion ger en geometrisk tolkning för tillämpad matematik, så som till exempel vektoraddition som följer parallelogramregeln. Om vi har två punkter  $z_1$  och  $z_2$  i det komplexa planet så bildar  $z_1 + z_2$  diagonalen i en parallelogram, och  $z_1$  och  $z_2$  två av hörnen i parallelogrammet. Diagonalen  $z_1 + z_2$  har längden  $|z_1 + z_2|$  och beräknas enligt räkneoperationer för komplexa tal. I det komplexa talplanet kan vi lätt beskriva cirklar där en cirkel med medelpunkt i origo kan tolkas som alla punkter på cirkeln som uppfyller villkoret  $|z| = r$  där  $r$  är cirkelns radie. En cirkel som inte är placerad i origo utan, säg i en punkt  $p = (0, 2)$ , tolkas som alla punkter i cirkeln som uppfyller villkoret  $|z - 2i| = r$ . Om man vill beskriva en cirkelskiva, och inte vill ha med cirkelns rand, kan man skriva ekvationen som  $|z - 2i| < r$  (Se Figur 7).

### 5.2. Cauchys integralsats

År 1811, många år innan Gauss publicerat verket om komplex analys, skrev han ner ett viktigt resultat inom den komplexa analysen som idag kallas Cauchys Integralsats. Eftersom Gauss aldrig publicerade resultatet blev det A. L. Cauchy som fick sitt namn tillskrivet vid satsen för det viktiga grundresultat som härletts inom komplex analys. Cauchy kom oberoende av Gauss på samma teori. Augustin Lous Cauchy härleddes satsen och därmed heter den Cauchys Integralsats. Den ser ut som följande [11, s.187]:



Figur 7. Geometrisk tolkning av komplexa tal med vektoraddition och med cirklar.

**Sats 5.1** Antag att  $f(z)$  är analytisk på definitionsområde  $T$ . Låt  $\lambda$  vara en styckevis slät, sluten kurva i  $T$ , vars insida  $\Omega$  också är belägen i  $T$ , då gäller:

$$\int_{\lambda} f(z) dz = 0 \quad (5.1)$$

Exempel: Beräkna  $\int_{\partial\alpha} (\bar{z}^2 - z) dz$ , där  $\partial\alpha$  är en motsols orienterad rand av en triangel med hörnen  $[0, 1, -i]$ .<sup>1</sup>

Lösningförslag: Vi kan parametrisera randen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  och  $\lambda_3$  av triangeln och får då (Se figur 8):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= z_{11} + t(z_{21} - z_{11}) = t + ti - i, \\ \lambda_2 &= z_{12} + t(z_{22} - z_{12}) = 1 - t, \\ \lambda_3 &= z_{13} + t(z_{23} - z_{13}) = -ti, \end{aligned}$$

där  $(z_{11}, z_{21}) = (-i, 1)$ ,  $(z_{12}, z_{22}) = (1, 0)$  och  $(z_{13}, z_{23}) = (0, -i)$ . Enligt Cauchys integralsats gäller att om  $f(z)$  är analytisk på och inuti en slät sluten kurva  $\lambda$  så medför det att:  $\int_{\lambda} f(z) dz = 0$ . Vi får således:

$$\int_{\partial\alpha} (\bar{z}^2 - z) dz = \int_{\partial\alpha} (\bar{z}^2) dz - \int_{\partial\alpha} (z) dz$$

Cauchys integralsats ger då att  $\int_{\partial\alpha} (z) dz = 0$  eftersom  $f(z) = z$  är ett polynom och vi får således:

$$\int_{\partial\alpha} (\bar{z}^2 - z) dz = \int_{\partial\alpha} (\bar{z}^2) dz + 0 = \int_{\partial\alpha} (\bar{z}^2) dz$$

Enligt följande sats samt definitionen gäller att [11, ss. 165,167]:

**Sats 5.2**  $\int_{\partial\alpha} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$ ,

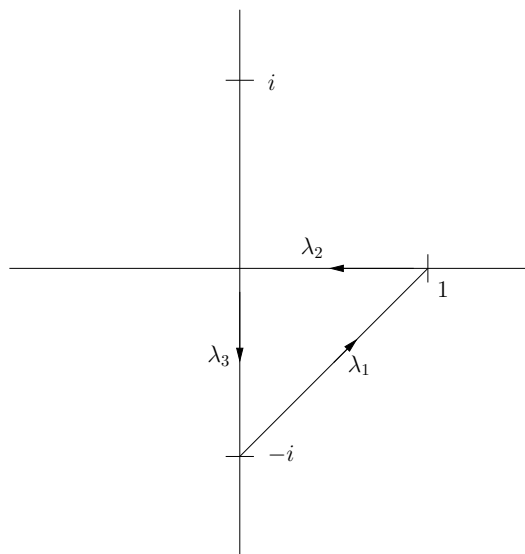
**Definition 5.1**  $\int_{\partial\alpha} f(z) dz = \int_{\lambda_1} f(z) dz + \int_{\lambda_2} f(z) dz + \dots$

Vi sätter in  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  och  $\lambda_3$  i följande ekvationer:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1} (\bar{z}^2) dz &= \int_0^1 (t - ti + i)^2 \cdot (1 + i) dt = -\frac{1}{3} + \frac{i}{3}, \\ \int_{\lambda_2} (\bar{z}^2) dz &= \int_0^1 (1 - t)^2 \cdot (-1) dt = -\frac{1}{3}, \\ \int_{\lambda_3} (\bar{z}^2) dz &= \int_0^1 (ti)^2 \cdot (-i) dt = \frac{i}{3}, \end{aligned}$$

vilket ger oss  $\int_{\partial\alpha} (\bar{z}^2 - z) dz = -\frac{2}{3} + \frac{2i}{3}$ .

<sup>1</sup>Exemplet om Cauchys integralsats kommer från "Send in Exercises II" uppgift 4, oktober 2009 av professor Egmont Porten. Lösningförslaget är dock eget.



**Figur 8.** En geometrisk tolkning av randen  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  och  $\lambda_3$  av en triangel med hörnen i  $[0, 1, -i]$  orienterad motsols.

## 6. DISQUISITIONES ARITHMETICAE (1801)

### 6.1. Talteori i allmänhet

Talteori är ett område i matematiken som handlar om hela tals egenskaper. Förutom moduloperationer, kongruens och faktorisering finns en rad viktiga grundläggande begrepp inom talteorin. Hit hör till exempel delbarhet, udda och jämna tal samt primtal.

Talet 42 är delbart med talet 21 eftersom  $42 = 21 \cdot 2$ , där 21 är en faktor, divisor eller delare för 42, som i sin tur är en multipel av 21. Hela tal  $z = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  kan delas upp i jämna tal på formen  $2n = \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots$  och vidare udda tal på formen  $2n + 1 = \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots$ . De jämna talen är delbara med 2 medan de udda talen ger resten 1 vid division med 2.

Andra grundläggande begrepp inom talteorin är primtal och sammansatta tal. De positiva talen  $N = 1, 2, 3, \dots$  kan delas upp i två kategorier: primtal  $P = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$  vilka endast är delbara med 1 eller sig själv (primtal är udda tal med undantag av talet 2), och sammansatta tal, som är alla positiva heltal större än 1 som inte är primtal, men de kan delas upp i primtalsfaktorer. De sammansatta talen är delbara med fler än två divisorer.

Baser och positionssystem tillhör också talteorin. Vårt nuvarande talsystem har som bekant ett positionssystem med bas 10, där ett tal  $T$  i utvecklad form kan skrivas som:

$$T = n_1 \cdot 10^k + n_2 \cdot 10^{k-1} + n_3 \cdot 10^{k-2} + n_4 \cdot 10^{k-3} + \dots + n_{k+1} \cdot 10^0, \quad (6.1)$$

där  $k$  är den högsta potensen som talet  $T$  kan ha, och där  $n_i$  anger värdesiffrorna för talet  $T$  i utvecklad form. Tal som olika symboler och räkneoperationer har existerade i flera olika forna kulturerna. I Babylonien fanns ett positionssystem med 60-bas (2000–1600 f. Kr) medan Mayakulturen i Sydamerika använde 19-bas. Egyptisk forntida matematik har vi fått kunskap om från två källor som finns bevarade för eftervärlden: *Papyrus Ahmose* och *Moskvapapirusen*.

I *Ahmose* som består av fjorton sammansatta ark av papyrus återfinns utsagor med problemlösningar. Arket inleds med en tabell om fördubbling av bråktal. Multiplikation utfördes med successiv fördubbling och metoden går ut på att ställa upp de två talen som ska multipliceras, i två kolumner.

Säg att vi ska multiplicera talet 13 med talet 17, vi får då enligt vårt sätt och räkna att  $13 \cdot 17 = 8 \cdot 17 + 4 \cdot 17 + (2 \cdot 17) + 1 \cdot 17$ . Egyptierna markerade i kolumnen med ett snedstreck om vilka tal som behövdes tas med i beräkningen. I den här beräkningen uteslöts  $(2 \cdot 17)$  och vi kan addera ihop summan  $17 + 68 + 136 = 221$  vilket stämmer bra om vi multiplicerar talet 13 med talet 17.

Vi kan översätta metoden i *Papyrus Ahmose* om multiplikation med två tal, säg  $\epsilon$  och  $\lambda$ , till hur datorer räknar med binära tal. Om vi skriver talet  $\lambda$  på formen:

$$\lambda = m_1 \cdot 2^k + m_2 \cdot 2^{k-1} + m_3 \cdot 2^{k-2} + m_4 \cdot 2^{k-3} + \dots + m_{k+1} \cdot 2^0, \quad (6.2)$$

där  $k$  är den högsta potensen som talet  $\lambda$  kan ha, och där  $m_i$  anger de binära värdesiffrorna för talet  $\lambda$  i utvecklad form. Detta är analogt med vilka "snedstreck" som de forna egyptierna tog med i kolumnberäkningen. Talen 13 och 17 kan till exempel

skrivs så som:

$$\begin{aligned}13 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\17 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,\end{aligned}$$

där  $m_i$  i binär form blir  $[1\ 1\ 0\ 1]$  respektive  $[1\ 0\ 0\ 0\ 1]$ . Vi kan nu multiplicera de binära talen, varvid vi får produkten  $[1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1]$  vilket är talet 221 på binär form. På Medeltiden och kallades detta "den egyptiska metoden" där man brukade termen *duplicatio* [12, ss. 43–66] [10, ss. 30–35][1, ss. 36–43]<sup>1</sup>

I Antikens återfinns vi ett rikt kulturarv av vetenskap och filosofi, även om vi inte ha mycket material bevarat från till exempel Egypten. Pythagoréerna var ett brödraskap som fått sitt namn efter Pythagoras (572–500 f. Kr.) som var från den grekiska ön Samos. Brödraskapet hade en skola i nuvarande södra Italien och ägnade sig åt matematik, filosofi och vetenskap, och brödraskapet tros också ha ägnat sig åt hemliga riter. Pythagoras sats  $a^2 + b^2 = c^2$  där  $a$ ,  $b$  och  $c$  är sidorna hos en rätvinklig triangel, har fått sitt namn efter Pythagoras men brödraskapet publicerade aldrig några verk offentligt. Sällskapetets motto var att "Allting är tal" vilket som inskrivet i pentagram de hade som symbol. Talmystik var viktigt för dem. Himlavalvet var uppbyggt av heltal som de ansåg vara heliga, perfekta och de enda tal som existerade. De gjorde många upptäckter inom talteorin med hela tal.

Diofantiska ekvationer som fått sitt namn efter Diofantos, har sitt ursprung i Alexandria ca 200 e. Kr. Den diofantiska ekvationen och dess sats ser ut som följande:

$$\alpha x + \beta y = c, \tag{6.3}$$

där  $SGD(\alpha, \beta) = 1$ , och där samtliga tal är heltal. Den diofantiska ekvationen har den allmänna lösningen  $x = cx_0 - t\beta$ ,  $y = cy_0 + t\alpha$  där  $t$  är ett heltal, och där  $(x_0, y_0)$  är en partikulärlösning till  $\alpha x_0 + \beta y_0 = 1$ . Euklides algoritm kan användas som metod för att lösa den diofantiska ekvationen.

Exempel: Säg att vi har den diofantiska ekvationen  $47x + 9y = 1$ . Vi löser ekvationen genom att sätta  $\alpha = 47$  och  $\beta = 9$ . Enligt Euklides algoritm gäller att:

$47 = 5 \cdot 9 + 2$ , och  $9 = 4 \cdot 2 + 1$ . Vi går nu åt andra hållet i Euklides algoritm och får då:

$$\begin{aligned}1 &= 9 - (4 \cdot 2) \\&= 9 - 4 \cdot (47 - (5 \cdot 9)) \\&= 9 - 4 \cdot 47 + 20 \cdot 9 \\&= -4 \cdot 47 + 21 \cdot 9\end{aligned}$$

Partikulärlösningen blir således  $x_0 = -4$  och  $y_0 = 21$ . Samtliga lösningar för den diofantiska ekvationen blir enligt sats (6.3):  $x = 1 \cdot (-4) - 9t$  och  $y = 1 \cdot (21) + 47t$ .

En välkänd diofantisk ekvation är Pythagoras sats där man söker en enskild heltalslösning eller oändligt många lösningar för ekvationen  $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$ . Det går att visa att Pythagoras ekvation har oändligt många heltalslösningar. Pythagoreiska tripplar, är tripplar av positiva heltal som satisfierar Pythagoras sats, och som kallas

---

<sup>1</sup>Precis som papyrus är ett material som inte bevarats väl, kan våra datorer tänkas vara svåra att bevara för människor i framtida kulturer. Det material som hittas, som till exempel våra serietidningar kan tänkas vara våra gudar beskrivna?

primitiva om de satisfierar  $(\alpha, \beta, c) = 1$ . Till exempel kallas den pythagoreiska trippeln 3, 4, 5 primitiv, medan den pythagoreiska trippeln 6, 8, 10 inte är primitiv. De primitiva tripplarna, om vilka de är, kan man få av följande sats:

**Sats 6.1** *De positiva heltalen  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $c$  bildar en primitiv Pythagoreisk trippel där  $\beta$  är jämn om det existerar relativt prima positiva heltal  $t_1$  och  $t_2$  sådana att  $t_1$  är udda och  $t_2$  är jämn, eller att  $t_2$  är udda och  $t_1$  är jämn, samt att  $t_1 > t_2$ . Det vill säga att  $\alpha = t_1^2 - t_2^2$ ,  $\beta = 2t_1t_2$  och  $c = t_1^2 + t_2^2$ .*

Något som fascinerat matematiker i många hundra år är om ekvationen  $x^n + y^n = z^n$  har några heltalslösningar där  $n > 2$ . Pierre de Fermat (en jurist som levde på 1600-talet och som ägnade sig åt matematik på sin fritid) skrev en förmodan, att han funnit ett bevis för att inga sådana lösningar fanns. Den som visade att Fermats förmodan var Andrew Wiles på 1990-talet. Wiles bevis av Fermats stora sats består av några 100 sidor och det tog nästan ett decenniums arbete att ta fram beviset. Från 1600-talet och fram till Wiles skapat ett bevis kom ett flertal matematiker fram till delbevis.

Två satser har fått sitt namn efter Pierre Fermat, de kallas Fermats lilla sats och Fermats stora sats och har intresserat matematiker i många hundra år. Inom aritmetik bevisade Fermat att om ett primtal kan skrivas i formen  $4n + 1$  kan den också skrivas som en summa av två kvadrattal. Den här satsen sägs vara skälet till att Gauss började intressera sig för matematik [13, ss. 15–21] [14, ss. 52–70] [12, ss. 5–184].

## 6.2. Gauss inför kongruensbegrepp, en inledning till vår tids moderna talteori

Den som lade grunden för vår moderna talteori och införde begrepp och notationer om moduloperationer och kongruens var Gauss som år 1801 gav ut verket *Disquisitiones Arithmeticae*. Verket består av sju delar: (I) Kongruenta tal i allmänhet, (II) Kongruenta tal av första grad, (III) Rester av potenser, (IV) Kongruens av andra grad, (V) Funktioner av andra grad på formen  $ax^2 + 2bxy + cy^2$ , (VI) Tillämpningar av talteorier, (VII) Ekvationen som definierar sektioner av en cirkel. Nedan beskrivs några viktiga resultat från *Disquisitiones Arithmeticae* och dess sju kapitel [1, ss. 548–549] [12, s. 142] [15].

### 6.2.1. I. Kongruenta tal i allmänhet

Första delen, "Kongruenta tal i allmänhet", behandlar delbarheten av de hela talen och dess egenskaper. Gauss visar algebraiska egenskaper hos rester och vidare inför han begreppen modulo, kongruens och beteckningen  $\equiv$  [15, ss. 1–4]

$$\alpha \equiv \beta \pmod{m} \tag{6.4}$$

Två heltal  $\alpha$  och  $\beta$  kallas kongruenta modulo  $m$ , om  $m$  delar differensen  $\alpha - \beta$ . De kan då skrivas som  $\alpha - \beta = km$ , för ett heltal  $k$ . När  $\alpha$  och  $\beta$  är kongruenta är var och en av dem en rest till den andre. Om  $m \nmid (\alpha - \beta)$ , så är  $\alpha$  icke-kongruent  $\beta$  modulo  $m$ .

Eftersom alla tal delar noll, följer att vi kan betrakta varje tal som kongruent sig själv relativt varje modulo. I så fall blir ekvation (6.4):

$$\alpha \equiv \alpha \pmod{m} \Leftrightarrow \alpha - \alpha = km \Leftrightarrow 0 = km,$$

vilket medför att  $k = 0$ .

Gauss visade att aritmetiska räkneoperationer som addition, subtraktion och multiplikation går att utföra på kongruenser samt vidare potenser likande dem vi har för vanliga tal. Reglerna kallas idag för en kommutativ ring:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \pmod{m} &\equiv \alpha \pmod{m} + \beta \pmod{m} \\ \alpha - \beta \pmod{m} &\equiv \alpha \pmod{m} - \beta \pmod{m} \\ \alpha \cdot \beta \pmod{m} &\equiv (\alpha \pmod{m}) \cdot (\beta \pmod{m}) \\ \alpha^n \pmod{m} &\equiv (\alpha \pmod{m})^n \end{aligned}$$

Division går däremot bara att räkna med om  $m$  är ett primtal och vi utökar då räkneoperationerna och kalla dem för en kommutativ kropp. Räkneoperationerna har använts av tidigare matematiker som levde på medeltiden, bland annat al-Khwarizmi och Leonardo av Pisa men det var Gauss som generaliserade heltalen och införde rigorösa beteckningar och begrepp i verket *Disquisitiones Arithmeticae*.

### 6.2.2. II. Kongruenta tal av första grad

I den här delen av verket beskriver Gauss några satser gällande linjär kongruens av första grad, det vill säga kongruenser på formen [15, ss. 5–28] :

$$\alpha x \equiv \beta \pmod{m}, \tag{6.5}$$

där  $x$  är en obekant.

Gauss ger också bevis till Aritmetikens fundamentalsats som säger:

**Sats 6.2** *Varje positivt heltal  $p > 1$ , kan skrivas som en produkt av primtal på endast ett sätt, där man kan bortse från faktorernas ordning.*

Satsen visar att två eller flera primtal kan skrivas som en produkt av ett heltal. Här kommer villkoren för sammansatta tal och primtals egenskaper in. Om vi till exempel delar upp talet 48 i primtalsfaktorer får vi  $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^\alpha \cdot 3^\beta$  där  $\alpha = 4$  och  $\beta = 1$  i det här fallet och vi ser att talet 48 kan delas upp i primtalen 2 respektive primtalet 3 som faktorer<sup>2</sup>.

Aritmetikens fundamentalsats hänger tätt samman med några andra viktiga satser, hjälpsatser och definitioner så som Diofantiska ekvationer, Euklides algoritm och linjär kongruens av första grad som Gauss diskuterade i 6.2.2.

**Sats 6.3** *Linjära diofantiska ekvationer: Låt  $\alpha$  och  $\beta$  vara heltal där  $d = \text{SGD}(\alpha, \beta)$ . Ekvationen  $\alpha x + \beta y = c$  har oändligt många lösningar om  $d|c$ . När  $d \nmid c$  saknas lösning. Om  $x = x_0$ , och  $y = y_0$  är partikulärlösningar till ekvationen, så ges samtliga lösningar av  $x = x_0 + \frac{\beta}{d} \cdot t$ , och  $y = y_0 - \frac{\alpha}{d} \cdot t$ , där  $t$  är ett heltal. [12, s. 134]*

<sup>2</sup>Eratosthenes (285-200 f. Kr.) var bibliotekarie i Alexandria och han skapade en metod för att ta fram primtal  $p$  som är mindre än ett heltal  $N$ .



Sambandet med Euklides algoritm tar oss till diofantiska ekvationer (6.3) med största gemensamma delare  $SGD(\alpha, \beta) = d$ , där man söker alla lösningar till den diofantiska ekvationen där det existera  $d$  inkongruenta lösningar.

I 6.2.2 tar Gauss upp diskussionen om algebraiska ekvationer som analogt kan föras vidare för linjärt kongruenta tal

**Sats 6.4** *Linjär kongruens av första grad: Om  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $q$  är heltal, sådana att  $q > 0$  och  $SGD(\alpha, q) = \eta$  i ekvationen*

$$\alpha x \equiv \beta \pmod{q}, \quad (6.6)$$

*gäller att om  $\eta | \beta$ , existerar precis  $\eta$  inkongruenta lösningar modulo  $q$ . Om  $\eta \nmid \beta$ , har den linjära kongruensen av första graden ingen lösning. [12, s. 154]*

Vi kan notera enligt satserna ovan att  $\alpha x \equiv \beta \pmod{q}$  är ekvivalent med den linjära diofantiska ekvationen  $\alpha x - qy = \beta$  med två variabler. När  $\eta | \beta$  har ekvationen  $\alpha x \equiv \beta \pmod{q}$  oändligt många lösningar vilka ges av  $x = x_0 + \frac{q}{\eta}t$ ,  $y = y_0 + \frac{\alpha}{\eta}t$ , för  $t = 0, 1, 2, \dots, (\eta - 1)$ .

Exempel: Om vi har  $\alpha = 9$ ,  $\beta = 24$  och  $q = 15$ , där  $\eta = SGD(9, 15) = 3$ , så gäller enligt satsen 6.4 att om  $3 | 24$ , existerar exakt  $\eta = 3$  inkongruenta lösningar modulo 15. Den linjära kongruensen blir i vårt fall  $9x \equiv 24 \pmod{15}$  vilken är ekvivalent med den linjära diofantiska ekvationen  $9x - 15y = 24$ . Vi får med Euklides algoritm en partikulärlösning:

$$\begin{aligned} 15 &= 9 \cdot 1 + 6 \\ 9 &= 6 \cdot 1 + 3 \\ 6 &= 3 \cdot 2, \end{aligned}$$

När vi räknar Euklides algoritm baklänges ser vi att partikulärlösningen av den diofantiska ekvationen  $9x - 15y = 24$  blir  $9 \cdot (16) - 15 \cdot (8) = 24$ . Det vill säga  $x_0 = 16$  och  $y_0 = 8$ . Samtliga tre inkongruenta lösningar för  $x$  får vi således av:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0 + \frac{q}{\eta} \cdot 0 = 16 + \frac{15}{3} \cdot 0 = 16 \\ x_1 &= x_0 + \frac{q}{\eta} \cdot 1 = 16 + \frac{15}{3} \cdot 1 = 21 \\ x_2 &= x_0 + \frac{q}{\eta} \cdot 2 = 16 + \frac{15}{3} \cdot 2 = 26, \end{aligned}$$

Sats 6.4 säger således att om  $x_0$  är en partikulärlösning av  $\alpha x \equiv \beta \pmod{q}$ , så får vi exakt  $\eta = SGD(\alpha, q)$  inkongruenta lösningar. Det kan skrivas som  $x_0, x_0 + \frac{q}{\eta}, x_0 + \frac{2q}{\eta}, \dots, x_0 + \frac{(\eta-1)q}{\eta}$ . Samma gäller för  $y$  om vi räknar ut dess samtliga lösningar. I vårt exempel fick vi lösningen  $x = 16, 21, 26 \pmod{15}$ .

### 6.2.3. III. Rester av potenser

I del tre bevisar Gauss bland annat Fermats lilla sats och han diskuterar Wilsons sats. Fermats stora sats koncentrerade sig Gauss inte på alls, men han gratulerade den franska matematikern Sophia Germain för hennes insats att ge ett delbevis för Fermats stora sats [15, ss. 29–62].

Fermats lilla sats [12, s. 217] säger att om  $p$  är ett primtal och  $x$  är ett heltal, så är  $x^p - x$  delbart med  $p$ . Fermats lilla sats går också att uttrycka som följande: [15, s. 31]

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}, \quad (6.7)$$

för alla primtal  $p$  och alla positiva heltal  $x$  som inte är multipel av  $p$ . Ett exempel ger att om  $x = 4$  och  $p = 3$ , så får vi  $4^{3-1} - 1 = 15$ . Vi ser att 15 är delbart med  $p = 3$ , det vill säga  $4^{3-1} \equiv 1 \pmod{3}$  för primtalet  $p = 3$  och för det positiva heltalet  $x = 4$  och vidare gäller  $3 \nmid 4$ .

Wilson's sats [12, s. 216] säger att om  $p$  är ett primtal då får vi:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}. \quad (6.8)$$

Gauss diskuterar Lagranges bevis från år 1771 samt vidare Eulers bevis i del III av *Disquisitiones Arithmeticae* och ger sedan ett eget bevis för Wilson's sats [15, s. 51]. Satsen skapades av John Wilson och blev publicerad av Edward Waring i en bok år 1770 där han deklarerade att hans elev Wilson kommit fram till satsen men inte kunnat ställa ett bevis [12, s. 215]. Euler gav även ett bevis till Fermats lilla sats året 1736 [12, s. 217].

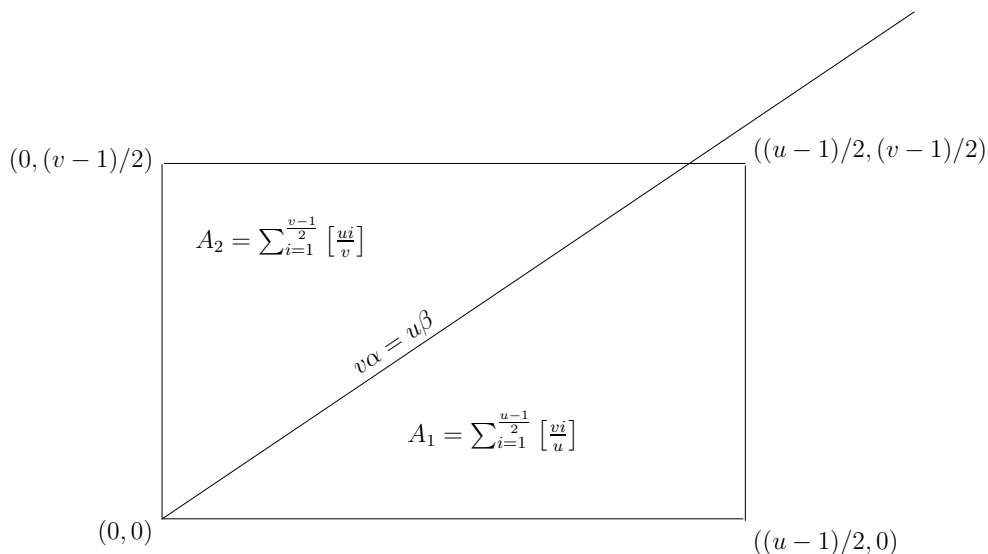
#### 6.2.4. IV. Kongruens av andra graden

I den fjärde delen utvecklar Gauss teorin om Reciprocitetssatsen. Han gav satsen namnet *Theorema Aureum* (Den gyllene satsen) och satsen berör kvadratisk reciprocitet [15, ss. 63–107].

För två olika udda primtal  $u$  och  $v$  säger satsen att om både  $u$  och  $v$  kan skrivas på formen  $4\eta - 1$ , så existerar det lösning till precis en av ekvationerna (1)  $x^2 \equiv u \pmod{v}$  och (2)  $x^2 \equiv v \pmod{u}$ . Om minst en av  $u$  och  $v$  inte kan skrivas på formen  $4\eta - 1$  kan båda eller ingen av ekvationerna ha en lösning. Satsen svarar således frågeställningen: om den ena ekvationen har en lösning, enligt villkoren, har då den andra ekvationen lösning?

Exempel: Vi kan testa några olika fall. Säg att  $u = 7$  (kan skrivas som  $7 = 4 \cdot 2 - 1$ ) och  $v = 3$  (kan skrivas som  $3 = 4 \cdot 1 - 1$ ). Då ser vi att båda talen är av formen  $4\eta - 1$ . Det bör således existera lösning till precis en av de två ekvationerna (1)  $x^2 \equiv 7 \pmod{3}$  eller (2)  $x^2 \equiv 3 \pmod{7}$ . För positiva och negativa heltal  $k$ , där  $\frac{x^2-u}{v} = k$  det vill säga för  $\frac{x^2-7}{3} = k$  finns det ett flertal  $k$  så att (1) får lösningar  $x_i$ . Några sådana lösningar är till exempel  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 4$  och  $x_4 = 5$ . För (2) saknas lösning däremot. Säg nu att  $u = 11$  och  $v = 5$ . Här ser vi att endast  $u$  är av formen  $4\eta - 1$ . I det här fallet har båda ekvationerna (1) och (2) lösning. Slutligen, när  $u = 13$  och  $v = 5$  är ingen av  $u$  och  $v$  av formen  $4\eta - 1$  och i det här fallet saknar både (1) och (2) lösning. Formen  $4\eta - 1$  kan också skrivas som  $4\eta + 3$ .

Satsen om kvadratisk reciprocitet var först en förmodan av Euler han skrev ner i mitten av 1700-talet. Sedan formulerades satsen om av Legendre år 1754. Legendre publicerade ett flertal bevis för satsen men bevisen höll inte. Det blev Gauss som fick skapat det första korrekta beviset år 1796 där han använde induktion i beviset. Med åren fann han ett flertal nya bevis för satsen om kvadratisk reciprocitet. För beviset använder vi här en hjälpsats av Max Eisenstein (1823–1852), som förenklade beviset som Gauss skapat för den kvadratiske reciprocitetssatsen i del (IV) i *Disquisitiones Arithmeticae*. Eisensteins Lemma ser ut som följande: [12, s. 420]



**Figur 9.** Lagen om Kvadratisk reciprocitet. Eftersom  $v\alpha \neq u\beta$  för varje talpar  $(\alpha, \beta)$ . Därför skär linjen  $v\alpha = u\beta$  inte hörnpunkten  $((u-1)/2, (v-1)/2)$ .

**Hjälpsats 6.1** Om  $u$  är ett udda primtal samt  $\alpha$  är ett udda heltal, där  $u \nmid \alpha$ , så gäller att  $\left(\frac{\alpha}{u}\right) = (-1)^A$  där  $A = \sum_{i=1}^{(u-1)/2} \left[\frac{\alpha i}{u}\right]$ , där [12, s. 404]

$$\left(\frac{\alpha}{u}\right) = \begin{cases} 1, & \text{om } \alpha \text{ är en kvadratisk rest av } u \\ -1, & \text{om } \alpha \text{ inte är en kvadratisk rest av } u, \end{cases}$$

och  $[\dots]$  representerar avrundning nedåt till närmaste heltal [12, s. 7].

Satsen om Kvadratisk reciprocitet ser ut som följande: [12, ss. 417]

**Sats 6.5** Lagen om Kvadratisk reciprocitet: Låt  $u$  och  $v$  vara olika udda primtal. Då gäller:

$$\left(\frac{u}{v}\right) \cdot \left(\frac{v}{u}\right) = (-1)^{\frac{u-1}{2} \cdot \frac{v-1}{2}}. \quad (6.9)$$

Bevis: Antag att vi har par av heltal  $\alpha, \beta$  där  $1 \leq \alpha \leq \frac{u-1}{2}$  och  $1 \leq \beta \leq \frac{v-1}{2}$ . Mängden av sådana par är  $\frac{u-1}{2} \cdot \frac{v-1}{2}$ .

Vi kan notera att  $v\alpha \neq u\beta$  för samtliga par. Om  $v\alpha = u\beta$  skulle  $v|u\beta$  vilket innebär att  $v|u$  eller  $v|\beta$ . Eftersom  $u$  och  $v$  är olika primtal vet vi att  $v \nmid u$ , och eftersom  $v \leq (\beta-1)/2$  vet vi att  $v \nmid \beta$ .

Vi kan dela in paren i två olika kategorier beroende på den relativa storleken hos  $v\alpha$  och  $u\beta$ . Om vi numrerar  $\alpha, \beta$  kommer vi fram till att antalet talpar  $v\alpha > u\beta$  blir summan (Se Figur 9):

$$A_1 = \sum_{i=1}^{(u-1)/2} \left[\frac{vi}{u}\right].$$

Samma resonemang får vi för den övre mängden talpar  $\alpha, \beta$  som motsvarar  $v\alpha < u\beta$  där summan blir:

$$A_2 = \sum_{i=1}^{(v-1)/2} \left[ \frac{ui}{v} \right].$$

När man adderar samtliga talpar  $\alpha, \beta$  i respektive delområde  $A_1$  och  $A_2$ , samt eftersom vi vet att totala antalet par är  $\frac{u-1}{2} \cdot \frac{v-1}{2}$ , förstår vi att:

$$A_1 + A_2 = \frac{u-1}{2} \cdot \frac{v-1}{2}, \quad (6.10)$$

vilket är liktydligt med notationen i Eisensteins Lemma. Om vi nu har talet  $(-1)$  och låter ekvation (6.10) vara en potens för  $(-1)$  enligt följande:

$$(-1)^{A_1+A_2} = (-1)^{A_1} \cdot (-1)^{A_2} = (-1)^{\frac{u-1}{2} \cdot \frac{v-1}{2}}, \quad (6.11)$$

och noterar att Eisensteins Lemma 6.1 ger:  $(-1)^{A_1} = \left(\frac{v}{u}\right)$  samt  $(-1)^{A_2} = \left(\frac{u}{v}\right)$ , så är satsen för kvadratisk reciprocitet bevisad. ■

### 6.2.5. V–VII. Triangeltal, regelbundna månghörningar mm.

De övriga delarna av Gauss verk handlar om till exempel funktioner i andra grad av kvadratisk form som kan skrivas som (1)  $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  där  $a$  och  $b$  är heltal. Ordet form är ett äldre namn för ett homogent polynom och kvadratisk form betyder således ett homogent polynom av andra grad. Gauss menar i inledningen till del (V), att man kan kalla (1) för en form. I samma del av verket tar Gauss upp triangeltal. Summor och produkter förekommer ofta i talteorin och Gauss visar i del (V) en sats om triangeltal som har summaformeln [15, ss. 108–374] [15, ss. 375–406] [15, ss. 407–460]:

$$\sum_{i=1}^m i = 1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}, \quad (6.12)$$

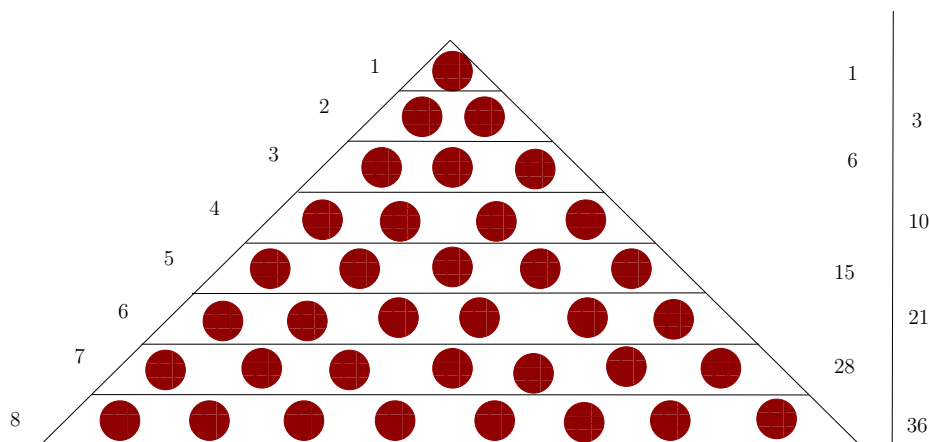
där  $m$  är ett heltal. Triangeltal kan visas som punkter i ett triangulärt gitter (Se Figur 10). Gauss kom fram till att varje positivt heltal blir summan av tre triangeltal. År 1796, den 10 juli skrev Gauss en notering i sin dagbok om upptäckten “Eureka!  $Tal = \nabla + \nabla + \nabla$ ” [2, s. 471] [7, s. 93].

I del (VI) diskuterar Gauss tillämpningar för talteorin och föregående kapitelns teorier, och slutligen i del (VII) tar Gauss upp ekvationen som definierar sektioner av en cirkel. Han skriver i inledningen att teorin han vill visa berör ekvationer för trigonometriska funktioner där han koncentrerar sig på cirklar och dess cirkelbågsegment. Sådana cirklar är till exempel de regelbundna månghörningarna. Metoden går också att använda för transcendentfunktioner, till exempel de som beror av integralen som ser ut som följande: [15, s. 407]

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}} dx, \quad (6.13)$$

samt till en rad olika typer av kongruens. Gauss skriver att en sådan trigonometrisk funktion i cirkel går att få rötter till med hjälp av ekvationen:

$$x^n - 1 = 0, \quad (6.14)$$



Figur 10. Triangeltal  $\sum_{i=1}^m i = 1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

Vidare diskuterar Gauss metoden med vilken man löser sådana ekvationer och hur man kommer fram till samtliga lösningar, det vill säga rötter till ekvationen. Vad Gauss visar är således att rötterna till ekvationen (6.14) ger hörnen för de regelbundna månghörningarna av grad  $n$ .

Gauss visade att endast de regelbundna  $n$ -hörningar är konstruerbara med passare och linjal, som är av formen  $n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots$ , där  $k = 0, 1, 2, \dots$ , och  $p_i$  är ett fermatskt primtal samt  $p_i$  är skild från  $p_j$  om  $i \neq j$ . Fermats primtal måste ha formen  $2^{2^\lambda} + 1$  där  $\lambda = 0, 1, 2, 3, 4$ . Faktorn  $2^k$  påvisar att vinklarna kan bisekteras till en  $2n$ -hörning. Dubbletter av alla regelbundna  $n$ -hörningar går således också att konstruera.

Gauss bevis för den regelbundna 17-månghörningen bestod i att transformera det geometriska resonemanget till en algebraisk lösning så som  $x^{17} - 1 = 0$ . Hörnen i en regelbunden  $n$ -hörning ges av de  $n$ :te rötterna ur 1 och således får ekvationen lösningen  $x_1 = 1$  och vidare alla rötter till ekvationen  $x^{16} + x^{15} + \dots + x + 1 = 0$ , där  $x_i$  är skild från 1. Gauss visade att eftersom 16 är en potens av 2, det vill säga  $2^n$  kan ekvationen skrivas som en produkt av andragradsekvationer  $ax^2 + bx + c = 0$  vars rötter ger hörnen i den givna cirkeln så som punkter på cirkelns rand [4, ss. 407–460].

Med modern notation kan problemlösningen för att få ut hörnen på en cirkels rand, för en regelbunden  $n$ -hörning göras med hjälp av komplexa tal och potenser av komplexa tal. Här ser vi genast att vi får användning av Gauss notation han skapade för komplexa tal  $z = a + bi$ , samt också det komplexa talplanet han skapade för att åskådliggöra komplexa ekvationer och tal (Se bilaga A) [11, ss. 33–36].

Säg att vi har ekvationen  $z^3 = 8i$  och vill lösa den och få fram rötterna till ekvationen. Vi vill skriva rötterna på formen  $z = a + bi$  och rita ut rötterna i det komplexa talplanet. Vi skriver om ekvationen  $z^3 = 8i$  på polär form  $z = r(\cos(v) + i \sin(v))$  vilket blir liktydligt med  $8i = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}))$ , eftersom  $z = 8i$  och  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 8$ . Med de Moivres formel blir ekvationen  $r^3(\cos(3v) + i \sin(3v)) = 8(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}))$  och  $r^3 = 8$ , vilket medför att  $r = 2$  och  $3v = \pi/2 + n2\pi$ . Vi får att  $v = \pi/6 + n2\pi/3$ . De tre sökta rötterna när  $n = 0, 1, 2$  blir således  $v_1 = \pi/6$ , och  $z_1 = (\sqrt{3}) + i$ ,  $v_2 = -(\sqrt{3}) + i$ ,  $z_3 = -2i$ . Om vi nu ritar i rötterna  $v_1$ ,  $v_2$  och  $v_3$  i

det komplexa talplanet i en cirkel ser vi att rötterna är punkter i cirkelns rand och att cirkeln har radie  $r = 2$ . Rötterna  $v_1$ ,  $v_2$  och  $v_3$  utgör vidare hörnen i en regelbunden triangel, det vill säga en regelbunden trehörning med centrum i origo. Om  $n = 5$  i ekvationen  $z^5 = w$ , så bildar rötterna en femhörning och om  $n = 17$  i ekvationen  $z^{17} = w$ , så bildas en regelbunden 17-hörning.

### 6.3. Gaussiska heltal och gaussiska primtal

Talteori med reella heltal, dess räkneoperationer och egenskaper kan analogt föras över till och gälla för en annan mängd, vilket var något Gauss förstod när han utvecklade teorin för komplexa tal. Gauss var med och skapade en viktig del av talteori som kallas algebraisk talteori där det existerar algebraiska heltal vilka är rötter till moniska polynom som har heltals koefficienter [12, ss. 547–574].

Gaussiska heltal är komplexa tal på formen  $x + iy$  där  $x$  och  $y$  är heltal och  $i = \sqrt{-1}$  [12, s. 547]. Mängden av gaussiska heltal betecknas  $Z[i]$ . När de gaussiska heltalen åskådliggörs i det komplexa talplanet bildar de punkter i ett gitter. Vi kan skriva en algebraisk ekvation  $\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2) = 0$  vilken satisfieras av det gaussiska heltalet  $\lambda = a + ib$ . Det gaussiska heltalet  $\lambda$  kallas ett kvadratisk irrationellt tal eftersom den satisfierar det moniska polynom med heltalskoefficienter av grad två [12, s. 549]. När  $\alpha = x_1 + y_1i$ , där  $x_1$  och  $y_1$  är rationella heltal och när  $\alpha$  är en rot till det moniska kvadratiske polynomet, måste  $\alpha$  också vara ett gaussiskt heltal [12, s. 549].

Vad det gäller addition, subtraktion och multiplikation mellan två gaussiska heltal  $\alpha = x_1 + iy_1$  och  $\lambda = x_2 + iy_2$ , är de slutna vid räkneoperationer. Om  $x_1$ ,  $y_1$  och  $x_2$  samt  $y_2$  är rationella heltal, då gäller att  $\alpha + \lambda$ ,  $\alpha - \lambda$  och  $\alpha \cdot \lambda$  alla är gaussiska heltal [12, s. 549].

Ett flertal egenskaper som gäller för rationella heltal, gäller också för gaussiska heltal av komplex form. Den aritmetiska normen för gaussiska heltal definieras som

$$N(x + iy) = x^2 + y^2, \quad (6.15)$$

och formar således kvadraten av absolutbeloppet för  $x + iy$ . När vi talar om delbarhet för gaussiska heltal gäller följande definition:

**Definition 6.1** *Antag att vi har två gaussiska heltal  $\alpha$  och  $\lambda$ , då gäller att  $\alpha | \lambda$  om det existerar ett gaussiskt heltal  $\delta$  sådant att  $\lambda = \alpha \cdot \delta$ .*

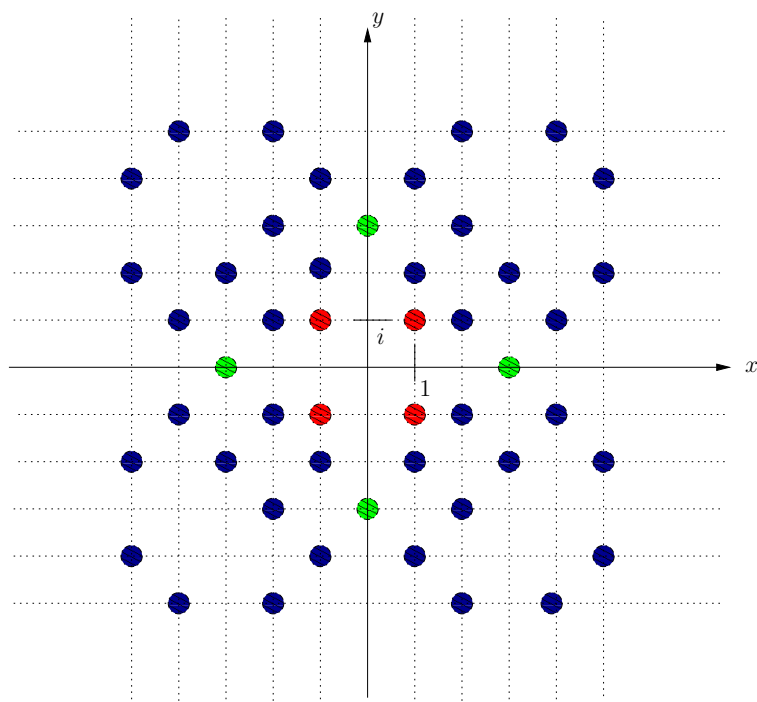
Vidare gäller att ett gaussiskt heltal  $u$  kallas en enhet om  $u$  delar 1. Därmed gäller att normen  $N(u) = 1$ .

**Sats 6.6** *Det existerar fyra gaussiska heltal som är enheter, och de fyra enheterna är 1,  $-1$ , och  $i$  samt  $-i$ .*

När  $u$  är en enhet, är  $u\alpha$  ett associerat heltal (eng. associate) till det gaussiska heltalet  $\alpha$ . För  $\alpha \in Z[i]$  är alltså de fyra gaussiska heltalen  $\pm\alpha$ ,  $\pm i\alpha$  associerade till  $\alpha$ .

Ovan egenskaper ger förutsättningar för definition av de gaussiska primtalen.

**Definition 6.2** *Ett gaussiskt heltal  $r$ , skilt från noll kallas ett gaussiskt primtal om det inte är en enhet, och endast är delbar med en enhet eller sina associerade heltal.*



**Figur 11.** Ett gaussiskt primtal  $p$  är en form av gaussiskt heltal. Ett gaussiskt heltal kan vara ett gaussiskt primtal  $p$  om den har precis åtta olika delare, de fyra enheterna och de fyra associerade heltalen. Gauss kom fram till att det existerar tre olika kategorier av gaussiska primtal: (a)  $\pm 1 \pm i$  (röda punkter). (b)  $\pm \delta, \pm \delta i$ , där  $\delta$  är av formen  $4q + 3$  och ett primtal (gröna punkter), (c)  $\pm v \pm wi$  eller  $\pm w \pm vi$ , där  $v \neq 0$  och  $w \neq 0$ , och olika och att vidare  $v^2 + w^2$  är ett primtal (blå punkter).

Det ger de gaussiska primtalen specifika egenskaper som Gauss kom fram till. Ett gaussiskt heltal är ett gaussiskt primtal om den har åtta av följande delare, av vilka de första är de fyra enheterna, och de fyra övriga är de associerade heltalen (Se Figur 11):

- Fyra enheter:  $1, -1, i, -i$ .
- Associerade heltal:  $r, -r, ir, -ir$ .

Vi kan använda metoden med Euklides algoritm för att finna största gemensamma delare för två gaussiska heltal.

**Definition 6.3** *Två gaussiska heltal  $\alpha$  och  $\lambda$  kallas relativt prima om 1 är en största gemensam delare till  $\alpha$  och  $\lambda$ .*

Om vi får fram att två gaussiska heltal  $\alpha$  och  $\lambda$  har  $i$  som största gemensamma delare, kommer de associerade heltalet till  $i$  också vara största gemensamma delare för  $\alpha$  och  $\lambda$ .

Divisionsalgoritmen för gaussiska heltal ser inte precis likadan ut som för de rationella heltalen där vi menar att vi får en rest av divisionen som är mindre än delaren. Här kommer begreppet norm in istället, och vi säger att resten vid en division har en norm mindre än normen för divisionen.

**Sats 6.7** *En normfunktion  $N$  av en mängd komplexa tal till en mängd reella, icke negativa tal som satisfierar följande egenskaper:*

1.  $N(\alpha)$  är ett icke-reellt tal för alla komplexa tal  $\alpha$ .
2.  $N(\alpha\lambda) = N(\alpha) \cdot N(\lambda)$  för alla komplexa tal  $\alpha$  och  $\lambda$ .
3.  $N(\alpha) = 0$  om  $\alpha = 0$ .

Vi får således villkoren för gaussiska heltal och divisionsalgoritm som följande:

**Sats 6.8** *Låt  $\alpha$  och  $\lambda$  vara gaussiska heltal där  $\lambda$  är skilt från noll. Det existerar då gaussiska heltal  $u$  och  $w$  sådana att  $\alpha = \lambda u + w$ , och  $0 \neq N(w) < N(\lambda)$ . Vi kallar  $u$  för kvoten och  $w$  för resten för divisionen.*

Man kan bruka gaussiska heltal för att finna lösningar till diofantiska ekvationer av formen  $x^n + y^n = n$ , där  $n = 1, 2, 3, \dots$

Gauss arbete med komplex talteori tar upp diskussion om metod för att dela upp de gaussiska heltalen i faktorer. Talet 2 och primtal av typen  $p = 4k + 1$ , där  $k$  är ett heltal, var de enda tal som kan delas upp i Gaussiska heltalsfaktorer kom Gauss fram till. Vi har exempelvis  $4 \cdot 3 + 1 = 13$ :

$$(2 + i3)(2 - i3) = 4 - 3i + 3i - i^2 9 = 4 - i^2 9 = 4 - (-1)9 = 13.$$

Inte alla primtal går att dela upp i gaussiska heltalsfaktorer. Till exempel primtalen 11 och 19.

#### 6.4. Sammanfattningsvis om *Disquisitiones Arithmeticae*

I verket *Disquisitiones Arithmeticae* samlar Gauss resultat inom talteori, inte bara från egna resultat utan också teorier av Euler, Lagrange och Fermat samt Legendre. Från del IV-VII är teorierna mest Gauss egna resultat. Den matematik vi idag kallar algebraisk talteori, kallade Gauss högre aritmetik. *Disquisitiones Arithmeticae* sammanför och systematiserar talteorin och de hela talen från att innan ha varit en samling löst spridda förmodan, satser och definitioner. Luckor fylldes där det tidigare inte funnit korrekta antaganden och bevisföring eller att sådana saknats helt. Gauss var endast 21-24 år när han med så klart sinne sammanförde dessa viktiga resultat i *Disquisitiones Arithmeticae*. Verket var dock skrivet på latin eftersom Gauss tillhörde den sista generationen som publicerade verk på latin. Språket inom vetenskapen fick en brytpunkt på 1800-talet. Vetenskapliga böcker och artiklar började publiceras på franska, tyska och engelska samt andra språk. Den första engelska utgåvan av *Disquisitiones Arithmeticae* publicerades inte förrän 1965. Samtidigt ägnade Gauss tid åt matematik inom andra områden, till exempel doktorsavhandlingen där han ger bevis för algebrans fundamentalsats. Gauss teori om regelbundna månghörningar och hans bevis för algebrans fundamentalsats bär många likheter om hur han tänkte om cirklar och punkter på randen till exempel [15] [1, ss. 550–551] [7, ss. 94–95] [2, ss. 32–48].



## 6.5. Bernhard Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ och funktionen $\pi(x)$

Bernhard G. F. Riemann (1826–1866) doktorerade i matematik vid Göttingens universitet efter han bytt inriktning från teologi till matematik på Berlins universitet. Han fortsatte studierna vid Göttingens universitet där han forskarstuderade med Gauss som handledare. Riemann tog vid Gauss studier inom bland annat komplex analys, talteori och den icke-euklidiska geometrin. Riemann ägnade sig också åt serier inom analysen samt åt fördelningen av primtal. Både Gauss och Riemann studerade mängden primtal och de studerade fall om hur många primtal det existerar som understiger ett positivt tal  $x$ .

Det finns en definition som säger:

**Definition 6.4** Funktionen  $\pi(x)$ , där  $x$  är ett positivt heltal, betecknar antalet primtal som inte överstiger  $x$

Vi ser till exempel att de primtal som inte överstiger talet  $x = 25$  är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 och 23. Således gäller  $\pi(25) = 9$ .

Gauss antog att  $\pi(x)$  ökar med samma hastighet som funktionen  $\frac{x}{\log x}$  och funktionen  $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$ , där  $Li(x)$  är en logaritmisk integral där  $\int_2^x \frac{1}{\log t} dt$  representerar arean under kurvan  $y = \frac{1}{\log t}$ , samt över t-axeln  $t = [2, x]$ . Gauss förmodan blev bevisad av den ryska matematikern Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821–1894) som visade att det existerar reella tal  $\alpha_1$  och  $\alpha_2$  där  $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$  så att  $\alpha_1(\frac{x}{\log x}) < \pi(x) < \alpha_2(\frac{x}{\log x})$ . Vidare visade Chebyshev att kvoten mellan  $\pi(x)$  och  $\frac{x}{\log x}$  närmar sig ett gränsvärde när  $x$  ökar, då måste gränsvärdet vara 1.

Riemann kopplade samman beteendet med funktionen  $\pi(x)$  ihop med en serie Euler skapat. Euler hade ägnat sig åt reella serier på 1700-talet och närmare bestämt serier av formen:

$$g(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots, \quad (6.16)$$

där  $s$  är ett reellt tal. När  $s > 1$  konvergerar serien. Euler kom fram till att serien kan skrivas som en oändlig produkt över alla primtal, det vill säga som en produkt av primtalsfaktorer. För reella tal gäller att  $g(1) = \infty$ , vilket är en harmonisk serie och för  $g(2) = \frac{\pi^2}{6}$ . När  $s$  är ett jämnt tal, innehåller värdet av  $g(s)$  alltid  $\pi$ . För udda  $s$  blir problemlösningen mer diffus.

Riemann omformulerade serien att gälla även för komplexa tal och visade hur konvergens sker för hela komplexa tal  $z$  när  $\Re(z) > 1$ , och där  $\Re(z)$  är den reella delen av ett komplext tal. Resultatet kallas idag för Riemanns zeta-funktion och betecknas  $\zeta(s)$ .

Det var ett resultat Riemann presenterade år 1859 i en artikel för Berlins vetenskapsakademi. Det var en hypotes där han menade att samtliga komplexa nollställen för Riemanns zeta-funktion  $\zeta(z)$  är belägna vid den vertikala linje  $x = \frac{1}{2}$  och vidare ut mot en kritisk remsa där de begränsas av  $x = 0$  och  $x = 1$ . Riemann kopplade samman  $\zeta(z)$  med fördelningen av alla primtal  $p$  som en identitet<sup>3</sup>:

$$\zeta(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^z} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)^{-1}, \quad (6.17)$$

<sup>3</sup>Resultatet kan bevisas med hjälp av Aritmetikens fundamentalsats och beviset behöver också ta fasta på resultat från analysen [16].

där vänsterledet är  $\zeta(z)$  och högerledet är en ekvation vars produkt sträcker sig över alla primtal  $p$  [12, ss. 239–246] [12, ss. 77–81] [12, s. 116] [8, s. 655] [17, ss. 200–203].

## 7. CERES (1801)

### 7.1. En empirisk formel om solsystemet och planeten som fattades

Efter att Gauss publicerat sitt verk om talteori 1801 ändrades hans inriktning radikalt. Han började intressera sig för astronomi och tillämpningar inom astronomi. Det passade honom väl eftersom han med lätthet kunde utföra långa beräkningar på papper, både med heltal och långa sekvenser av decimaltal. Gauss hade till exempel intresserat sig för Johann Titius arbete, Titius som år 1766 upptäckt denna empiriska avståndsformel med sekvenser om talföljder, hur planeterna var belägna i solsystemet och året 1772 blev den här lag publicerad av Johann E. Bode.

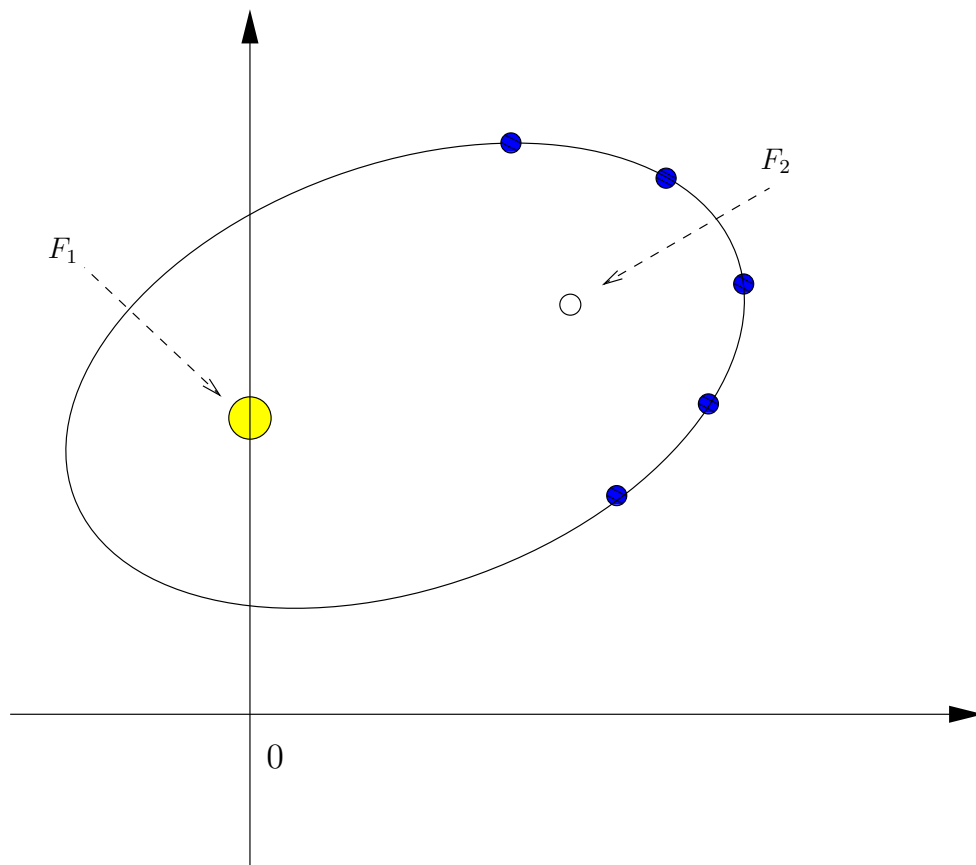
Det var den här empiriska lagen om avstånd mellan planeternas banor och solen som fick Gauss intresserad av astronomi. Merkurius, Venus och Jordens samt Mars banor är belägna på respektive avstånd 4, 7, 10 och 16 från Solen. Vidare är Jupiter, Saturnus och Uranus banor belägna på respektive avstånd 52, 100 och 196 från Solen enligt den ursprungliga empiriska lagen.

Vid nyåret 1801 upptäckte astronomen Giuseppe Piazzi en himlakropp som fick namnet Ceres. Den var beläget på avstånd 28 i solsystemet och följde Titius–Bodes empiriska avståndslag väl. Solsystemets planets banor har enligt Titius–Bodes lag avståndet  $A_m = 4 + m$  till Solen, där  $m = 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96$  är en talföljd.

Lagen beräknas idag med astronomisk enhet  $AU$ . Radien byts i dag mot halvaxeln räknad från ellipsbanans centrum. Jordbanan har medelavståndet  $1,0AU$  till exempel. Man tar avståndet  $a$  från det elliptiska centrumet, där  $a$  är stora halvaxeln och  $b$  är lilla halvaxeln.  $C$  är centrum för ellipsbanan och Solen är belägen i en av ellipsens två fokuspunkter. Titius–Bodes lag blir således  $A'_n = 0.4 + 0.3 \cdot 2^n$ .

Upptäckten astronomen Piazzi gjorde på nyåret 1801 fick forskare att undra om de funnit planeten som saknats vid avstånd 28 i formeln  $A_m$ . Astronomen Piazzi som funnit miniplaneten Ceres tappade bort den på natthimlen och han hade inte hunnit beräkna dess elliptiska bana. När Ceres påträffades vid just det här avståndet 28 från Solen, där asteroidbältet existerar mellan Mars och Jupiter, blev Gauss intresserad av att försöka beräkna Ceres elliptiska omloppsbanor. Eftersom Ceres var liten jämfört med de stora planeterna i solsystemet, var det svårt att få fram parametrar och data från observationer.

Den som hundra år innan observerat natthimlen och planeterna var Sir Isaac Newton och han hade påpekat att det var svårt och få fram planetellipsernas banor av få observationer. Gauss, som var en stor beundrare av Newton, lyckades här mellan år 1801–1802 skapa en metod där endast tre observationer med mätdata behövdes tas med för beräkningar. Han beräknade den elliptiska banans parametrar och visade också med sina beräkningar hur man kan ta hänsyn till mätfel och osäkerhet i mätdata, det sistnämnda är något som brukar användas inom statistik idag och kallas för Gaussfördelningen. Gauss metod där endast tre observationer behövdes tas med i beräkningarna om objekts elliptiska banor, hjälpte honom att få fram omloppsbanan för Ceres och planeten visade sig vara exakt där Gauss räknat ut att den borde vara. Titius–Bodes lag gäller dock inte efter planeten Uranus som är beläget på avstånd  $A_6 = 196$ . I början av 1800-talet hade de inte dagens moderna instrument att kunna observera himlavalvet med dock [18, ss. 155–156] [7, s. 95] [1, s. 549] [19, ss. 479–481].



**Figur 12.** En ellips med Solen i fokuseringspunkt  $F_1$  och en imaginär fokuseringspunkt  $F_2$ . Ellipsen visar omloppsbanan för Ceres där fem observationer, vid fem olika tidpunkter gjorts för beräkning. På ellipsens rand ser vi läget för Ceres (blå himlakropp) vid de olika tidpunkterna.

## 7.2. Banberäkningar – ett exempel

För att kunna få fram parametrar för en ellipsbana, vilket vi kan tolka geometriskt som ett kägelsnitt, kan vi använda linjära system, determinanter och analytisk geometri för att få fram punktmängden för ellipsen i en graf, eller få fram en ekvation för ett sådant kägelsnitt [20, ss. 532–536] [19, ss. 479–504].

**Sats 7.1** *Ett homogent linjärt system med lika många ekvationer som okända har en icke-trivial lösning om determinanten för koefficientmatrisen är noll.*

Om vi gjort fem stycken observationer av miniplaneten Ceres elliptiska omloppsbanan vid olika tidpunkter, så får vi fem stycken skilda punkter på en ellipsrand:

$$(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), (x_4; y_4), (x_5; y_5). \quad (7.1)$$

En generell ekvation för ett kägelsnitt i ett plan som passerar genom de givna punkterna  $(x_1; y_1)$  till  $(x_5; y_5)$  ges av

$$A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 + A_4x + A_5y + A_6 = 0. \quad (7.2)$$

Koefficienterna  $A_1, A_2, \dots, A_6$  är inte alla lika med noll, och de är unika sånär som på en skalfaktor.

Punkterna  $(x_1; y_1)$  till  $(x_5; y_5)$  insatta i ekvation (7.2) ger ett linjärt ekvationssystem med fem ekvationer. Vi låter också ekvationssystemet innehålla ekvation (7.2) så vi får lika många ekvationer som okända koefficienter, vilket ger ett homogent linjärt system:

$$\begin{aligned} A_1x^2 + A_2xy + A_3y^2 + A_4x + A_5y + A_6 &= 0 \\ A_1x_1^2 + A_2x_1y_1 + A_3y_1^2 + A_4x_1 + A_5y_1 + A_6 &= 0 \\ A_1x_2^2 + A_2x_2y_2 + A_3y_2^2 + A_4x_2 + A_5y_2 + A_6 &= 0 \\ A_1x_3^2 + A_2x_3y_3 + A_3y_3^2 + A_4x_3 + A_5y_3 + A_6 &= 0 \\ A_1x_4^2 + A_2x_4y_4 + A_3y_4^2 + A_4x_4 + A_5y_4 + A_6 &= 0 \\ A_1x_5^2 + A_2x_5y_5 + A_3y_5^2 + A_4x_5 + A_5y_5 + A_6 &= 0. \end{aligned}$$

Om det existerar en icke-trivial lösning är determinanten  $D$  för systemet noll enligt sats 7.1. Därför sätter vi determinanten lika med noll och försöker finna en lösning till  $D = 0$ :

$$D = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (7.3)$$

Kofaktorexpansion [20, ss. 104–112] av determinanten  $D$  för vart och ett av elementen på den första raden blir som följande:

$$B_1x^2 + B_2xy + B_3y^2 + B_4x + B_5y + B_6 = 0, \quad (7.4)$$

där  $B_i$  är värdet som fås ut efter kofaktorexpansion av determinanten  $D$  med avseende på element  $(1, i)$ . Existerar det en lösning så kommer koefficienterna  $B_i$  att vara koefficienterna  $A_i$  i ekvation (7.2).

Geometriskt kan detta visas i en graf där man ritar ut omloppsbanan med hjälp av parametervärdena i ekvationen (Se bild 12). Det här kan sägas vara ett sätt och se på elliptiska banor och räkna på dem. Det finns många olika sätt och beräkna kägelsnitt och kurvor och utföra beräkningar inom astronomi för omloppsbanor, eller skapa datorsimuleringar och teoretiska beräkningar för himlakroppars banor. Determinanten bara är definierad för kvadratiska matriser. Om vi skulle haft fler mätpunkter än fem hade ekvationssystemet blivit överbestämt. I sådana fall hade vi fått använda minstakvadratmetoden istället. Metoden ovan är med andra ord endast brukbar när vi får lika många observationer som koefficienter som existerar för linjer, cirklar eller kägelsnitt.

I mer avancerade beräkningarna tar man hänsyn till även andra faktorer såsom gravitationskraft av andra himlakroppar än Solen. Det blir ganska komplicerade beräkningar som bör lösas med numeriska metoder.<sup>1</sup>

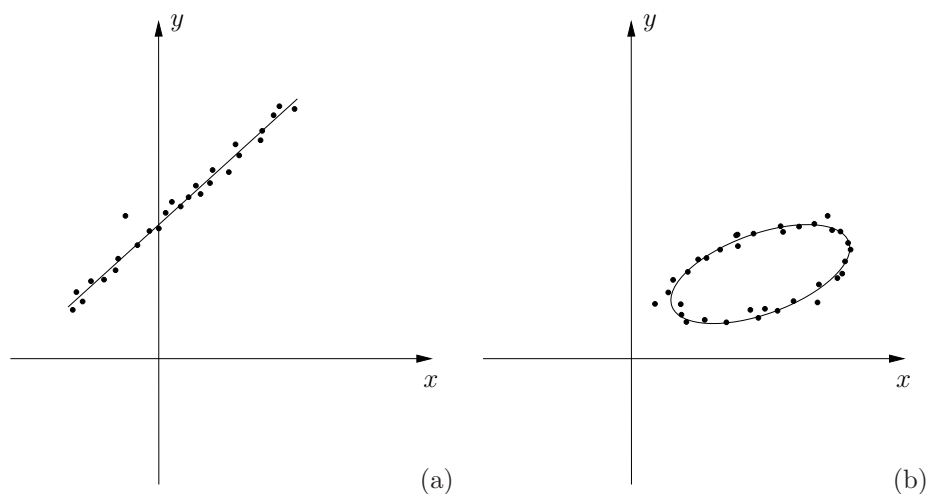
### 7.3. Minstakvadratmetoden

När Gauss mecenat Hertig C. W. F. av Braunschweig avled i strid i slaget vid Jena år 1806, där han fört befäl över Preussiska armén mot Napoleon, fick Gauss söka uppehåll på annat håll. Arbetet med att hitta en metod att beräkna Ceres omloppsbanan hade gjort Gauss omtalad inom vetenskap. Gauss blev erbjuden arbete i St. Petersburgs akademi men avböjde när han fick erbjudande om en tjänst som föreståndare och professor för det nybyggda observatoriet vid universitetet i Göttingen. Arbetet som föreståndare för observatoriet vid universitetet i Göttingen behöll Gauss livet ut, han var inte mycket för resor och tog sig endast en gång till ett forskningsseminarium i Berlin år 1836 [2, ss. 78–84] [1, s. 549].

Omkring åren när Gauss fick arbetet som föreståndare och professor vid universitetet i Göttingen publicerade han nya artiklar. I verket *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium* (Teori för himlakropparnas rörelse i kägelsnitt runt Solen) som Gauss publicerade 1809, har han utvecklat sitt arbete vidare om astronomiska beräkningar och omloppsbanor. I verket beskrev Gauss minstakvadratmetoden, vilket kan användas för att få fram en linje eller en kurva från observationer och mätdata. Den matematiska metoden kan i tillämpning användas

---

<sup>1</sup>Idag används en rad numeriska metoder så som till exempel Richardsons extrapolationsmetod för astrofysikaliska beräkningar om himlakroppars rörelser. Richardsons extrapolationsmetod är en högre ordningens metod för lösning av differentialekvationer. Beräkningarna blir noggranna och man tar hänsyn till flera tidssteg samtidigt och kan ha glesare mellan observationspunkterna. En annan metod kallas 15:e ordningens Everharts RADAU och metoden har används av forskare för att utföra till exempel datorsimuleringar och beräkningar på asteroiders omloppsbanor i syfte att skapa en eller flera kursändring under längre tid och därmed avstyra en asteroid från att kollidera med Jorden om det skulle utgöra ett hot och skapa en större naturkatastrof. Objekten har en återkommande bana runt Solen och vissa asteroiders omloppsbanor är belägen nära jorden. Andrea Carusi, forskare inom INAF-IASF och ordförande i The Spaceguard Foundation, Roma har till exempel i en artikel undersökt och gjort datorsimuleringar och beräkningar om att ge imaginära nära-jorden-objekt, Aramis och D’Artagnan ett flera stötar. Det är teoretiskt möjligt att påverka större föremål och ändra deras kurs med relativ liten påverkan. Datorsimuleringarna har gjorts för att beräkna objektens banor i många tidsintervall och under en tid av flera decennier. Verkliga sådana objekt som har sin bana nära Jorden är till exempel Apophis (omkrets på 0.4–1.0 km) och VD1 (omkrets på 0.5–1.2 km). De är i diameter stora nog för att inte bara brinna upp i atmosfären. Sannolikheten är minimal att en sådan kollision skulle ske i dagsläget men risken finns där ändå och därför undersöker och bevakar The Space Guard Foundation med flera organisationer dessa nära-jorden-objekt (Eng. Near Earth Objects).



**Figur 13.** (a) Minstakvadratmetoden för en linje. (b) Minstakvadratmetoden för polynom av grad  $n$ . Här i formen av en ellips. Experimentellt framtagna punkterna  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)$  är utplacerade runt linjen respektive ellipsen.

för att tolka all möjlig data där linjer och kurvor skall ritas ut grafiskt eller när man vill få ut en ekvation eller få fram statistisk fakta [1, s. 549] [7, s. 95] [20, ss. 437–441].<sup>2</sup>

Minstakvadratmetoden var något Gauss skrivit teorier och gjort tillämpningar till redan innan år 1795 när han började studera vid universitetet i Göttingen som ung student, men det var inget han publicerat innan året 1809 således [2, ss. 546–547].

Här följer några exempel med modern notation, där minstakvadratmetoden används för att anpassa till exempel en linje, ett kvadratisk polynom eller ett kubiskt polynom, som har ekvationerna:

$$y = \alpha + \beta x \quad (7.5)$$

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 \quad (7.6)$$

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3, \quad (7.7)$$

### 7.3.1. Minstakvadratmetoden för en rät linje

Antag att vi vill passa in en rät linje till de experimentellt framtagna punkterna  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)$ . Metoden att få fram den räta linjen med hjälp av minstakvadratmetoden är som följande:

Låt  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)$  vara en mängd punkter vi fått fram från observa-

<sup>2</sup>Fouriertransformation (J. B. J. Fourier 1768–1830) kan användas för trigonometriska funktioner vilka kan approximeras och beräknas med minstakvadratmetoden, och med hjälp av ortogonal projektion i inre produktrum. Uträkningar och simuleringar för till exempel jordbävningståg eller elektromagnetiska vågor kan man få fram värden för med hjälp av minstakvadratmetoden. Metoden är väl anpassad för statistik för att få till en linje eller kurva som bäst är anpassad för en viss mängd mätdata. Gauss teorin och metoden används än idag för beräkningar och simuleringar i datorer med bara några enstaka justeringar är teorin och metoden mycket användbar för olika astronomiska beräkningar [20, ss. 442–447].

tioner. Vi ska nu anpassa värdena till en rät linjes ekvation

$$y = \alpha + \beta x \quad (7.8)$$

För att få fram linjen måste vi bestämma värdena för de obekanta koefficienterna  $\alpha$  och  $\beta$  i ekvationen. Ekvationen kallas en regressionslinje inom statistik och det finns en sats för som förklarar metoden för att lösa ut koefficienternas värden. Inom tillämpad matematik och närmare bestämt inom linjär algebra kan man använda resultat om ortogonal projektion i inre produktrymd för att beräkna linjer eller kurvor. Om punkterna  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)$  är i linje med varandra kan vi skriva dem i ett ekvationssystem:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \beta x_1 \\ y_2 &= \alpha + \beta x_2 \\ &\vdots \\ y_p &= \alpha + \beta x_p \end{aligned}$$

Ekvationssystemet kan vi sedan skriva på matrisform så som:

$$N\mathbf{v} = \mathbf{y}, \quad (7.9)$$

där

$$N = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}.$$

Vi kan då få en unik minstakvadratlösning och finna en rät linje  $y = \alpha_0 + \beta_0 x$  till mätpunkterna genom att använda satserna om normalekvation och ortogonal projektion av  $\mathbf{y}$  på  $T$ , där  $T$  är ett kolonnrum (rummet som spänns upp av en matris kolonner) av  $N$  [20, ss.437–439]. Koefficienterna  $\alpha_0, \beta_0$  skriver vi så som:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}$$

Vi får då normalsystemet för  $\mathbf{v}_0$  vilket blir:

$$\mathbf{v}_0 = (N^\top N)^{-1} N^\top \mathbf{y}$$

Det medför nu att  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$  är lösningen för normalekvationen:

$$N^\top N\mathbf{v} = N^\top \mathbf{y}.$$

### 7.3.2. Minstakvadratmetoden för polynom

Säg att vi har ett polynom av grad  $n$  så som:

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$



och ska finna en kurva från  $p$  punkter  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_p, y_p)$ . Vi får här  $p$  ekvationer:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n \\ y_2 &= a_0 + a_1x_2 + \dots + a_nx_2^n \\ &\vdots \\ y_p &= a_0 + a_1x_p + \dots + a_nx_p^n \end{aligned}$$

Precis som för räta linjen och lösningen med minstakvadratmetoden, kan vi skriva polynomet i matrisform vilket då blir:

$$N\mathbf{v} = \mathbf{y}.$$

Det vill säga vi får följande matriser och vektorer:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_p & x_p^2 & \dots & x_p^n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet transformerat till normalsystem [20, ss. 440–441] ger:

$$\mathbf{v}_0 = (N^\top N)^{-1} N^\top \mathbf{y},$$

vilket då bestämmer koefficienterna till polynomet genom  $\min \|\mathbf{y} - N\mathbf{v}\|$ . Om  $N^\top N$  är inverterbar gäller att normalekvationen får en unik lösning  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ . Normalekvationen ger:

$$N^\top N\mathbf{v} = N^\top \mathbf{y}.$$

Med tiden fick Gauss fram omloppsbanan även för andra miniplaneter som var belägna mellan Mars och Jupiter: Pallas (1802), Juno (1804) och Vesta (1807). I beräkningarna för objektens omloppsbanor tog Gauss nu utöver påverkan från Solens gravitationskraft också med gravitationskraften från närläggna planeter. Året 1809 publicerade han verket *Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium* (Teorin för himlakropparnas rörelse i kägelsnitt runt Solen) och med hjälp av Gauss minstakvadratmetod kunde Neptunus omlopps bana beräknas teoretiskt år 1846 [1, s. 549] [7, ss. 95–96] [2, ss. 49–66].

Gauss hade formulerat grunderna till minstakvadratmetoden redan när han studerade på *St. Katharines Volksschule* i Braunschweig året 1795, med han publicerade aldrig upptäckten i yngre år. Den franske matematikern Legendre publicerade en likande metod år 1806 i verket *Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes*. Legendre och Gauss delar således äran för upptäckten av minstakvadratmetoden.

## 7.4. Normalfördelningen

Vid den tid Gauss publicerat verket med minstakvadratmetoden, uppfann Gauss också det vi i dag kallar normalfördelningskurvan, när han ville visa osäkerheten i

data framtagen på experimentell väg och vilka fel som kunde uppstå vid astronomiska beräkningar. Inom statistik och sannolikhetslära används idag metoden med normalfördelning för kontinuerliga stokastiska variabler. Dessa kan anta alla värde i ett intervall till skillnad från diskreta stokastiska variabler som antar ändligt många värden [18, ss. 155–156] [7, s. 95] [21, s. 73].

Om det existerar en funktion  $f$  sådan att:

$$T(\xi \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad (7.10)$$

för alla  $x$ , så kallas  $\xi$  en stokastisk kontinuerlig variabel och  $f$  kallas en frekvensfunktion. De generella egenskaperna och villkoren för normalfördelningen  $N(\mu, \sigma)$  säger att om  $\xi \in N(\mu, \sigma)$ , så har  $\xi$  frekvensfunktionen:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (7.11)$$

för  $-\infty < x < \infty$ , och där parametern  $\mu$  är väntevärdet samt parametern  $\sigma$  är standardavvikelsen för  $\xi$ . Parametrarna  $\mu$  och  $\sigma$  är således givna konstanter sådana att  $-\infty < \mu < \infty$ , och  $\sigma > 0$ .

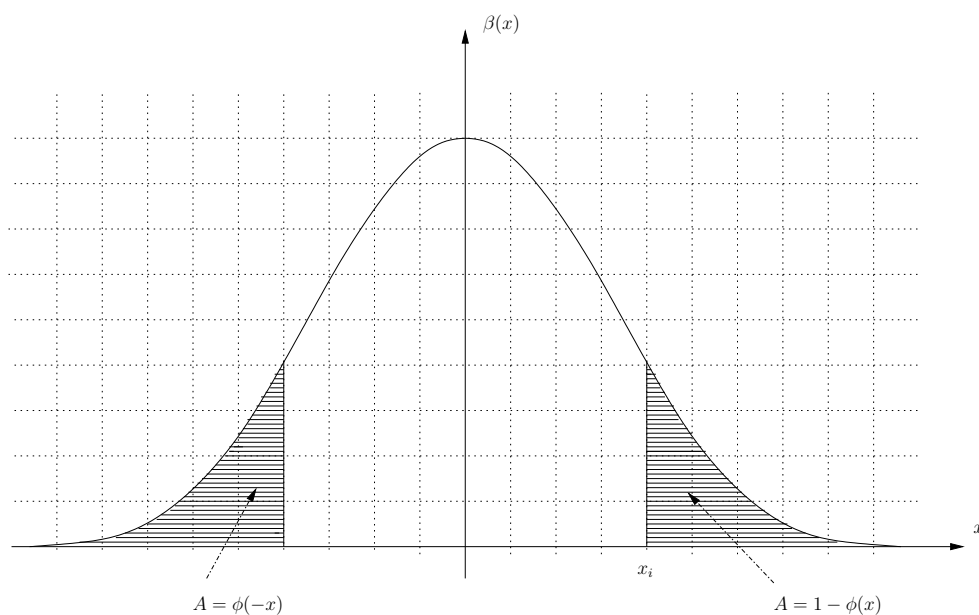
När man sätter in värden för  $\mu$  och  $\sigma$ , säg  $\xi \in N(0, 1)$  får vi ut en standardiserad normalfördelning. I det här fallet när vi satt in värden för parametrarna, så blir frekvensfunktionen:

$$\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad (7.12)$$

där  $-\infty < x < \infty$ , och dess fördelningsfunktion definieras

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^x \beta(t)dt. \quad (7.13)$$

Detta illustreras i en graf (Se Figur 14).



**Figur 14.** Fördelningsfunktionen  $\phi(x)$  och areorna mellan kurvan och  $x$ -axeln  $A = -\phi(x)$  samt  $A = 1 - \phi(x)$  i den så kallad Gausskurva eller en normalfördelningskurva för  $N(0, 1)$ .

## 8. OBSERVATORIET I GÖTTINGEN

### 8.1. Gauss och Göttingens observatorium

Gauss blev chef och professor för Göttingens observatorium (1807) tack vare den tillämpade matematiken han skapat för beräkningar av omloppsbanor vilket gjorde hans arbete vida berömt. En till bidragande orsak att han fick ta arbetet, kan ha varit för att han behövde en inkomst eftersom hans mecenat Hertigen av Braunschweig avlidit i strid i slaget vid Jena 1806. Chefsposten på observatoriet var ett ämbete han hade livet ut. Två år efter att han inträtt i tjänst avled hans hustru på grund av komplikationer vid barnfödande då hon fött Gauss deras tredje barn. Gauss fick upp nya intresseområden, började ägna sig åt en rad vetenskaper och tillämpad matematik i områden så som fysik och mekanik, och efter att han utfört geodetiska mätningar och skapade han teorier inom differentialgeometrin. Gauss hade föreslagit och fått Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) till en professur i fysik vid Göttingens universitet år 1831.

I november 1830 blev en stol ledig i fysik inom Göttingens universitet eftersom professor i fysik, Tobias Mayer gick bort. Hannovers kabinettminister, ansvarig för universitetsärenden, rådfrågade Gauss i ärendet, varvid Gauss kom fram till fem kandidater som kunde passa för tjänsten. Gauss menade att professuren skulle innehas av en fysiker som också var kunnig i matematik och som dessutom var duktig på att undervisa. Weber, som var en av de fem kandidaterna, blev vald trots sin ringa ålder på 27 år eftersom Gauss sett Weber föreläsa i Berlin och för att Weber hade de kriterier som krävdes för tjänsten. I april 1831 blev således Weber erbjuden tjänsten som professor i fysik vid Göttingen Universitet. Gauss som var teoretiker blev god vän med Weber redan från start. Weber visade sig vara en experimentalist och de kompletterade varandra utmärkt med sina kunskaper.

År 1820 hade Hans Christian Ørsted (1777–1851) upptäckt sambandet mellan elektricitet och magnetism, vilket fick ett flertal framstående forskare att ägna sig åt ämnet. André-Marie Ampère (1775–1836), en fransk fysiker, var en av dem som gjorde upptäckter inom elektromagnetismen. SI-enheten ampere som mäter elektrisk strömstyrka har fått sitt namn efter Ampère. Den tyske fysikern George Ohm (1789–1854), kom år 1827 på Ohms lag  $U = RI$  vilken beskriver förhållandet mellan elektrisk spänning  $U$ , elektrisk resistans  $R$  och elektrisk ström  $I$  för en linjär resistor. Michael Faraday (1791–1867), en brittisk fysiker och kemist upptäckte vidare inducerande ström 1831. George Green (1793–1841) som var en brittisk matematiker och fysiker publicerade år 1828 verket *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, och verket innehåller potentialteorin samt Greens sats inom vektorfältanalys.

Gauss blev intresserad av magnetism och främst jordmagnetism och intresset beror dels på att ämnet var något nytt inom vetenskapen vid den här tiden, och dels för att Weber började en fysikprofessur vid Göttingen. Alexander Humboldt hade vidare av en händelse visat Gauss instrument han använt inom studier av magnetism och han rekommenderade Gauss att intressera sig för ämnet. År 1829 fick Gauss vidare besök av den belgisk forskare och matematiker Adolphe Jacques Quetelet (1796–1874) som var på genomresa och gjorde mätning i Tyskland, Holland med flera länder om jordmagnetism. Quetelet hade med sig instrument och visade experiment för Gauss

om styrkan i magnetisk kraft vilket stimulerade Gauss att göra egna experiment. Det resulterade i att Gauss år 1833 efter att ha utfört egna experiment, publicerade ett papper på 36 sidor *Intensitas vis Magneticae Terrestris ad Mensuram Absolutam Revocata*.

Gauss använde matematiska och astronomiska beräkningar för att fastställa att endast tre storheter behövde användas vid beräkning med magnetism: massa, längd och tid. Han hade använt en magnetisk nål vid observation och bevisat Coulombs lag som säger att attraktionskraften mellan två poler är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan polerna. Gauss menade att varje magnetisk kropp innehåller lika kvantitet av de två polernas "flöden": norr som är den positiva och söder som är den negativa. Gauss menade vidare att den magnetiska kraften beror på även temperatur och att det således är nödvändigt att bestämma även temperaturens verkan vid experiment. I papperet diskuterade han jordens dynamik, mekanik och processer, att jorden omges av ett magnetiskt kraftfält, att det är jordens kärna som bör skapa det magnetiska kraftfältet på grund av järn i jordens inre. Han skriver att det knappt finns någon vetenskap i ämnet. För att fastställa sin teori beskriver han variationen av kraftfältets lutning i vertikalplanet och formulerar teorin matematisk. Gauss diskuterar på vilket sätt man kan mäta och beräkna styrkan av jordmagnetismen. Han använder milligram, millimeter och sekunder för de tre storheterna massa, längd och tid i beräkningarna. I beräkningen använde Gauss lutning i vertikal led och beräknade vinkeln för att få fram de magnetiska nålarnas riktning. Han menar i papperet att det vore mer praktiskt och använda tyngre magnetiska nålar vid mätning så att man kan bortse från luftströmmars påverkan vid mätning. Gauss ville utveckla teorin till att mäta vridning, rotation och variationer i dessa, och vidare ville han förstå påverkan av temperaturen. Han ville visa att jordmagnetismen är ett resultat av ämnet järn i jordens inre, i kärnan eller nära jordytan.

Året 1833 skickade han ett förslag till styrelse att han ville utveckla ett magnetiskt observatorium på universitetet. Hans ansökan fastslogs och några månader senare var byggnaden färdig. Allt järn i byggnaden hade bytts ut mot koppar och byggnaden fick dubbla fönster och skydd mot påverkan av luftdrag. I byggnaden utfördes mätningar med deklinationsvariationer, det vill säga mätningar om variationen av kraftfältets lutning i vertikalplanet. Mätningarna utfördes vid olika tider och med hjälp av bland annat en astronomisk klocka och en magnetometer.

Göttingens universitet blev centrum för magnetisk forskning och Gauss och Weber fick besök av ett flertal forskare från andra länder i Europa vilka också byggde magnetiska observatorier vid sina respektive universitet. Gauss såg till att forma ett magnetiskt sällskap vars syfte blev att publicera artiklar om magnetism och med hjälp av Humboldts inflytande lyckades de också få till mätstationer i de brittiska kolonierna. Till slut blev sällskapet världsomspännande och magnetiska observatorium utvecklades också i trakter så som Himalaya, Newfoundland och Jamaica samt Gibraltar med flera platser. Gauss och Weber organiserade så att ett flertal observationsplatser världen över gjorde mätningar av magnetflödet hos Jordens magnetfält och dess variationer. De fick stort inflytande tack vare forskningen om jordmagnetism. Gauss fick skrivit en rad artiklar i ämnet vilket han publicerade i sällskapets tidskrift.

Gauss fick motivation till potentialteorin utifrån fältundersökningar och geodetiska mätningar han ägnade sig åt i yngre år, och teorin utvecklade han i ett par decennier. Några tidiga resultat Gauss publicerade om potentialteorin återfinns i verket *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus*

*nova tractatus* där Gauss beräknar gravitationen på olika geografiska platser.

När han några decennier senare studerade jordmagnetismen, publicerade han år 1839 verket *Allgemeine Theorie der Erdmagnetismus* där han behandlar den allmänna teorin om jordmagnetism och där han bestämmer den magnetiska kraften vid jordytan. Han uttrycker den magnetiska potentialen som en summa av en konvergent serie med sfäriska funktioner.

Året 1840 publicerade han ett nytt papper där han introducerade också ordet potential för att beskriva funktionen med kraftkomponenterna som är omvänt proportionella mot avståndet i kvadrat. Gauss beräknade utifrån resultaten han funnit från observationer, bland annat riktningen av de magnetiska axlarna. Han beräknade således riktningen och storleken av den magnetiska fältstyrka av jorden samt styrkan av jordmagnetismen. Fördelningen av magnetiskt flöde inuti en kropp kan ersättas med fördelningen av flöden på dess yta menade Gauss.

Modern forskning har visat att 94 procent av jordens magnetfält kommer från jordens kärna. Gauss teori om jordmagnetism visade sig vara korrekt på när 2 procent i de beräkningar han skapade. Gauss studier om magnetismen utfördes experimentellt med observatörer jorden runt, och som han visade med teoretisk analys, att magnetfältet kommer från jordens inre. Gauss studier visade att det var geofysikaliska mekanismer som skapat magnetflödet. Han visade teoretiskt att magnetfälten skapas av jordens kärna, vilket var ett viktigt resultat eftersom man då kunde begränsa undersökningar om andra orsaker till varför magnetfält existerar.

År 1841 fick Gauss kontakt med Charles Wilkes, en amerikansk kapten som hittat den magnetiska sydpolen vid en punkt som stämde bra med Gauss beräkningar publicerade i papper. Den magnetiska nordpolen hade funnits av en kapten med namnet Ross endast tre grader och 30 minuter söder om den punkt Gauss räknat fram.

Potentialteorin handlar om analytiska teorier för differentialekvationer som har sin tillämpning inte bara i magnetism utan också i elektrostatik och annan matematisk fysik. Gauss utgick från Newtons allmänna gravitationslag för att skapa teorier inom potentialteorin [2, ss. 153–162] [2, ss. 139–162] [2, s. 422] [2, s. 428] [7, ss. 96–97] [1, s. 550] [5, ss. 194–213] [22, ss. 257–258].

Absolutbeloppet  $F$  av kraftvektorn  $\mathbf{F} = m_1\mathbf{g}$ , som verkar mellan två punkter  $p$  och  $o$  med massorna  $m_1$  respektive  $m_2$  har ekvationen:

$$F = m_1g = m_1 \left( k \frac{m_2}{a^2} \right) \quad (8.1)$$

där  $a$  är avståndet mellan punkter  $p = (x_1, y_1, z_1)$  och  $o = (x_2, y_2, z_2)$  och  $k$  är en konstant. Avståndet i  $\mathbb{R}^3$  i ett ortonormerat koordinatsystem, med  $o$  i origon kan beräknas med ekvationen:

$$a = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad (8.2)$$

Potentialen i punkten  $p$  definieras som en funktion  $U = km_2/a$ , där  $m_2$  är massan i punkten  $o$ . Fältvektorns  $\mathbf{g}$ s komponenter får man genom att derivera  $U$  så som:

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{\partial U}{\partial x_1} = -k \frac{m_2 x_1}{a^3} \\ g_y &= \frac{\partial U}{\partial y_1} = -k \frac{m_2 y_1}{a^3} \\ g_z &= \frac{\partial U}{\partial z_1} = -k \frac{m_2 z_1}{a^3}, \end{aligned}$$

där  $U$  är en harmonisk funktion eftersom den satisfierar Laplaces ekvation:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z_1^2} = 0 \quad (8.3)$$

Gauss skapade således potentialteorin vid den här tiden han ägnat sig åt forskning med jordmagnetism <sup>1</sup>.

Gauss studier av variationer i Jordens magnetfält bidrog också till att han fick enheten gauss uppkallad efter sig, vilket är en enhet för magnetisk flödestäthet. Gauss och Weber anlade vidare en ledning mellan astronomiska observatoriet och det fysikaliska kabinettet i Göttingen. Det var den första signalapparat, en galvanometer som var en telegraf och som blev en uppfinning som de inte fanns en direkt användning för det här århundrandet. Gauss och Weber utvecklade också cgs-systemet, ett dimensions- och enhetssystem som ligger till grunden för det moderna SI-systemet [13, ss. 80–81] [7, ss. 96–97].

## 8.2. Vektorfältanalys

### 8.2.1. Divergenssatsen

Divergenssatsen som Gauss upptäckte år 1813 är en form av Analysens fundamentalsats i tre dimensioner, den andra är Stokes sats. Man kan med hjälp av satsen konvertera ytintegraler till volymintegraler och tvärt om [23, ss. 532–598] [19, s. 876–953] [8, s. 790].

Om  $\mathbf{F}(x, y, z)$  är ett kontinuerligt vektorfält vars definitionsmängd  $D$  är ett tredimensionellt område begränsat av  $S$ , där  $S$  är en orienterad sluten yta, och  $S$  har en enhetsnormalvektor  $\hat{\mathbf{n}}$  riktad ut från området  $D$  som varierar kontinuerligt längs  $S$ , så gäller:

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (8.4)$$

Satsen gäller endast om  $\mathbf{F}$ :s komponenter  $F_1$ ,  $F_2$  och  $F_3$  samt dess partiella derivator är deriverbara och de partiella derivatorna av  $\mathbf{F}$  är kontinuerliga i området  $D$ .

När  $\mathbf{F}(x, y, z)$  är en deriverbar vektorfunktion (vektorfält) av formen  $\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$ , kan divergensen av  $\mathbf{F}(x, y, z)$  uttryckas som [23, ss. 532–598] [19, s. 876–953]:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{i}F_1 + \mathbf{j}F_2 + \mathbf{k}F_3) = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3 \quad (8.5)$$

En volymintegral är en trippelintegral av formen [23, ss. 532–598] [19, s. 876–953]:

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dV = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta V_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i) \Delta V_i, \quad (8.6)$$

där  $\Delta V_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , är delintervall av området  $T$ , indelat i  $n$  delar och  $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{z}_i)$  är punkter i  $\Delta V_i$ . Vi kan skriva trippelintegralen för enkla områden så som:

$$\iiint_T f(x, y, z) \, dV = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz, \quad (8.7)$$

<sup>1</sup>Inom elektrostatik, för beräkningar om elektrostatiska fält blir konstanten  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , där  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$  och massorna  $m_1$  och  $m_2$  är istället laddningarna  $q_1$  och  $q_2$ .

för allmänna fall kan områden behöva delas upp i enklare delområden. Det kan vara fall med ett hål i kroppen till exempel. Vi ser att  $dV = dx dy dz$  för cartesiska koordinater. Notationen är att  $a$  och  $b$  är volymen  $V$ 's utsträckning i  $x$ -led,  $g_1(x)$  är den undre begränsningskurvan för volymen  $V$  i  $xy$ -planet,  $g_2(x)$  är den övre begränsningskurvan i  $xy$ -planet, och  $h_1(x, y)$  är den under begränsningsytan av  $V$ , och  $h_2(x, y)$  är den övre begränsningsytan av  $V$ .

Enhetsnormalen  $\hat{\mathbf{n}}$  i divergenssatsen får vi fram från ytans ekvation  $g(x, y, z) = 0$  och beräknar gradienten  $\mathbf{g}$  dividerat med absolutbeloppet av gradienten  $\mathbf{g}$  så som [23, ss. 532–598] [19, s. 876–953]:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\text{grad } g}{|\text{grad } g|}. \quad (8.8)$$

### 8.2.2. Divergenssatsen i tillämpning: Ljusflödet ut från en kristall

Om vi har en sluten volym  $V$  som har en ytarea  $S$ , så kan ytintegralen betraktas som ett totalt utflöde för flödesfältet  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  ut från volymen  $V$ .

Exempel: Säg att vi har en yta  $S$  i ett tredimensionellt koordinatsystem där ytan till tetraedern begränsas av planet  $x + y + z = 1$  samt koordinatplanen i första oktanten (Se Figur 15). Ytan representerar en kristall där ljus som träffar kristallens yta flödar igenom i alla punkter med en viss energimängd som beskrivs av flödesfältet  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ . En sida av kristallen, som ses som en yta, representeras således av ekvationen  $z = 1 - x - y$ , och ytans hörn återfinns i koordinaterna  $z = (0, 0, 1)$ ,  $y = (0, 1, 0)$  och  $x = (1, 0, 0)$ . Flödesfältet ges i exemplet av

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Ie^{-(x+y)}\mathbf{i} + Ie^{-(x+y)}\mathbf{j} + I\mathbf{k},$$

med enheten  $J/m^2s$ , där  $I$  är en konstant. Vi vill finna energimängden hos det ljus som flödar ut ur kristallen per sekund, vilket vi får av ytintegralens ekvation. För att få till en enklare beräkning, eftersom kristallen har fyra ytor vilket ger fyra olika ekvationer, konverterar vi ytintegralen till en volymintegral enligt Gauss divergenssats:

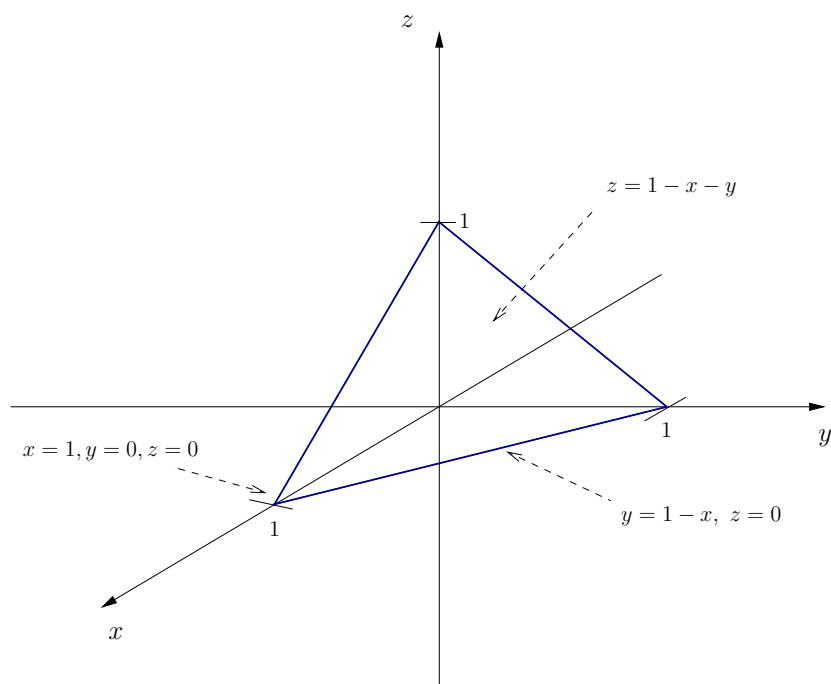
$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div} \mathbf{F} \, dV, \quad (8.9)$$

Vänsterledet representerar ytintegralen och högerledet volymintegralen.

Från flödesfältets ekvation  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  får vi ut  $\text{div} \mathbf{F} = -Ie^{-(x+y)} - Ie^{-(x+y)} + 0 = -2Ie^{-(x+y)}$ , där vi deriverat  $F_x$  med avseende på  $x$ ,  $F_y$  med avseende på  $y$  och  $F_z$  med avseende på  $z$  och sedan adderat ihop dem som en summa. Övre och nedre integralgränser för trippelintegralen får vi ut genom att se att vi ska för  $z$  integrera från noll till ytan  $z = 1 - x - y$ , för  $y$  ska vi integrera från 0 till  $1 - x$  vilket är från  $x$ -axeln och till begränsningslinjen i  $xy$ -planet, för  $x$  ska vi integrera från 0 till 1 vilket är integration från origo till  $x = 1$  (Se Figur 15).

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} -2Ie^{-(x+y)} \, dz dy dx = \\ &= -2I \int_0^1 e^{-x} \, dx \int_0^{1-x} e^{-y} \, dy \int_0^{1-x-y} 1 \, dz, \\ &= -2I \int_0^1 e^{-x} \, dx \int_0^{1-x} (1-x-y)e^{-y} \, dy, \end{aligned}$$





Figur 15. En kristall med fyra ytor.

$$\begin{aligned}
 &= -2I \int_0^1 e^{-x}(e^{x-1} - x) dx, \\
 &= -2I \int_0^1 (e^{-1} - xe^{-x}) dx, \\
 &= -I \left( \frac{6}{e} - 2 \right).
 \end{aligned}$$

Energimängd hos det ljus som flödar ut ur kristallen per sekund blev i det här fallet  $-I(6/e - 2)$  [J/s]. Eftersom energimängden blev negativ måste kristallen absorberat en del av ljuset. Exemplet visade hur vi kan använda divergenssatsen.<sup>2</sup>

### 8.3. Gauss och Millers kristallografi

Gauss började intressera sig för kristallografi år 1831 och han studerade kvoten mellan de kristallografiska koefficienterna, om de var irrationella eller inte. Indexsystemet för kristallografiska koefficienter konstruerades först av professor Whewell i Cambridge University år 1825 och togs vid av hans student Willam Hallow Miller (1808–1880) som skapades ett system som kallas Millers index.

Gauss använde algebraisk geometri där han lät normalerna till varje kristallplan representera orienteringen av ytorna av en kristall efter studier Gauss gjort om Whewell

<sup>2</sup>Divergenssatsen som Gauss upptäckte år 1813 kallas också Ostrogradskys sats, eftersom Ostrogradsky bevisade satsen 1826 [8, s. 790].

teorier och också den tyska professorn Frans Ernst Neumanns arbeten. Normalerna till varje plan utgick från en punkt i origo och möte varje plan i rät vinkel vid en punkt placerad på en tänkt sfär.

Miller använde likande notation som Gauss när han skapade Millers index. När Miller publicerat sitt papper gratulerade Gauss honom med att Miller "slagit huvudet på spiken" perfekt med teorin hans beskrev i artikeln. Gauss hade lärt in geologi och kristallografi under en kortare tid, och han hade studerat kristaller med en 12 tum stor Reichenbach-theodolite, beräknat och skissat kristallernas geometriska vinklar, dock publicerade han inte något i ämnet. Gauss tid togs istället upp av optik och astronomi [2, ss.163–173] <sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Inom mineralogi och mineral kemi, studier om geovetenskap, används Millers index och också geometri idag. Det optiska indexet är en ellipsoid och en geometrisk tolkning av ett refraktionsindex, ljusets brytning i kristaller i tre dimensioner. En sfär kan användas för isotropa mineral. I de mer avancerade systemen, kallade anisotropa mineral, varierar brytningsindexet med kristallografisk riktning. De hexagonala och tetragonala mineralen tillhör till exempel det enaxlade optiska indexet (det finns också tvåaxlade optiska index). Den äldsta varianten av mineralet som hittats i naturen är ca 4,4 miljarder år och heter Zirkon  $ZrSiO_4$ , den är tetragonal och tillhör det enaxlade positiva optiska indexet. Man kan räkna på vinkeln mellan de optiska axlarna i ett mineral eftersom de inte är ortogonala och man använder enheten Ångström för att beskriva kristallstrukturen i mineralet. Med enheten Ångström beskriver man avståndet mellan atomerna sett i en ellipsoid. Avståndet mellan atomerna i ett mineral är olika, i olika riktningar och därför blir brytningsindex olika i olika riktningar. Därför kommer ljus som faller på mineralet att brytas vid mineralets yta [24, ss. 6–33] [24, ss. 130–159] [24, s. 418].

## 9. GEODESI, KRÖKNINGAR OCH KLASSISK DIFFERENTIALGEOMETRI

### 9.1. Geometrins utveckling

Beräkningar med kurvor och ytor, i en eller flera parametrar, har utvecklats från 1600-talet ungefär. År 1673 studerade till exempel Christiaan Huygens ljuset och fick idén till ett pendelur samt kurvor i plan. I Huygen's arbete finns en speciell teori om cykloider, att pendelns vikt när den svänger längst med en cykloids båge tar precis lika lång tid att svänga för en stor som liten amplitud. En pendelrörelses period är således lika för alla amplituder i detta fall. Leonhard Euler (1707–1783) bevisade Huygens teori 1764. Newton skrev vidare i sin artikel *Geometria Analytica* från 1671 (publicerad 1736) om krökningen av en kurva vid en punkt och han beräknade ett flertal olika kurvor och kom också fram till att vid en punkt kan kurvans krökning vara lika med noll. Johan Bernoulli publicerade i början av 1690-talet artiklar om kurvor och om ljusets strålar. Han skapade ekvationer för reflekterande ljusstrålar som parallellt träffade en sfärisk spegel och teorierna återfinns i verket *Acta Eruditorum*. Alexis Claude Clairaut (1713-1765) var den som år 1731 införde teorin om kurvor i rymden och kallade kurvor i tredimensionella rum för kurvor med dubbla krökningar och tittade på deras projektion i två vinkelräta plan. År 1749 publicerade han ett arbete om jordens form [8, ss.554–557].

Det första egentliga arbetet med differentialgeometri gavs ut år 1809 av fransmannen Gaspard Monge (1746–1818) medan ett av de främsta bidragen inom området skapades av Gauss när han år 1827 publicerade verket *Allmänna undersökningar av krökta ytor*. Verket innehåller satsen om krökningsmåttets böjningsvarians till exempel [9, ss.882–889] [25, ss.105–124] [26].

Differentialgeometrin är ett matematiskt ämne som tar upp studier om kurvor och ytors egenskaper. Den tar upp metoder för att beräkna båglängder, areor och volymer samt krökningar med hjälp av integral- och differentialkalkyl. Gauss teorier utvecklades och generaliserades till högre dimensioner av hans elev Bernhard Riemann och 60 år senare möjliggjorde Riemanns teorier Albert Einstein arbete om den allmänna relativitetsteorin [25, ss.1–99] [26, iii–viii].

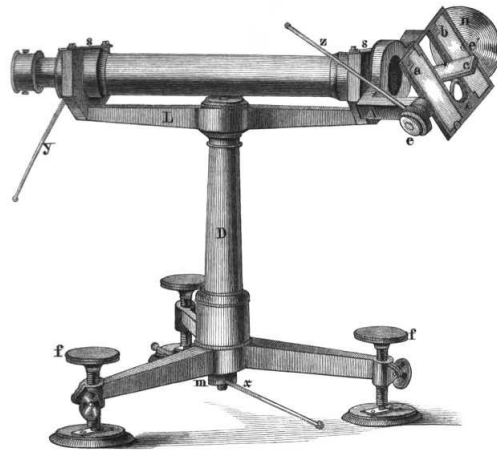
### 9.2. Gauss geodetiska mätningar

Gauss började intressera sig för geodesi tidigt i livet. Året 1794, när han upptäckte minstakvadratmetoden, intresserade han sig för till exempel avståndsberäkningar som kunde innehålla mindre fel i mätdata. Han ansåg metoden vara enkel och undrade om inte metoden används tidigare i något syfte. Gauss såg dock nytta med metoden att använda den i tillämpningar för observationer i fält med geodetiskt arbete<sup>1</sup>.

Gauss nämner i brev han skriver under studenttiden runt år 1797 att han saknar erfarenhet vad det gäller att rita tekniska ritningar för mekanik och arkitektur och

---

<sup>1</sup>År 1821 presenterade Gauss *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior* för Göttingens kungliga akademi där han beskrev sambandet mellan minstakvadratmetoden och sannolikhetsläran, och år 1823 sände han dem en *pars posterior: Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* vilket presenterades år 1826 och var ett resultat av hans tillämpade arbete med geodesi.



Figur 16. Gauss uppfinning heliotropen.

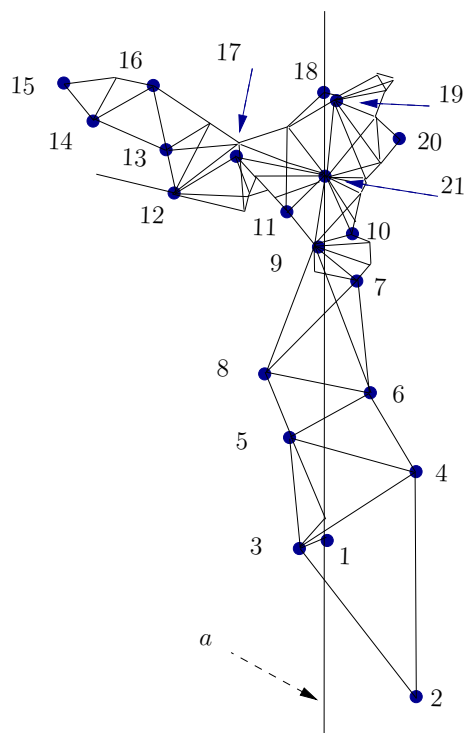
beskriver sitt intresse för observationer i fält med geodesi. I ett brev Gauss fick år 1802, skriver astronomen von Zach att eftersom Gauss är närsynt borde han vara rädd om sina ögon när han använder instrument för att observera himlavalvet och jordens yta. Gauss fick dock låna ett teleskop, en klocka och ett navigeringsinstrument av von Zach. Mellan åren 1803–1805 tog Gauss tid på sig att utföra mätningar och utforska området nära Braunschweig i syfte att skapa teorier om triangulering. Gauss blev intresserad av trianguleringsmetoden och att använda trigonometri på ytor när han läst en artikel skriven av Beigle som gjort mätningar i Bayern.

Året 1803 fick Gauss kontakt med von Ende som hade ett observatorium i Celle och som ägnat sig åt att göra mätningar av longitud och latitud i det geografiska området runt Braunschweig. Vid den här tiden skapades ett flertal kartor för militära ändamål och det kom sig att Gauss, von Eden och von Zach samarbetade för att få gjort mätningar i området runt Braunschweig, Helmstedt och Wolfenbutten. Gauss teori, metod och beräkningar med triangulering och mätningar han utfört med en sextant, uppmärksammades av baron Friedrich C. Muffling (1775–1851), en man som år 1821 blev chef för generalstaben för den Preussiska armén.

Det var inte förrän år 1817 Gauss i egentlig mening började ägna sig åt geodesi och att tillämpa matematik och utföra observationer. År 1818 blev han vetenskaplig rådgivare inte bara åt kungariket Hannover utan även Danmark och hans uppdrag bestod i att utföra lantmäteri, geodetiska mätningar i syfte att skapa kartor. Han uppfann här ett instrument som kallas heliotropen år 1821 för att kunna utföra mätningar genom triangulering. heliotropen var ett instrument där solstrålar reflekterades och riktades in i en spegel som i centrum hade ett öppet hål. En observationspunkt på jordens yta fixerades på avstånd med instrumentet vilket möjliggjorde en god avläsning och gav bra värden för längre avstånd (Se figur 16).

Mellan åren 1821–1826 ägnade sig Gauss åt triangulering och en rad med punkter bestämdes för att kunna mäta den geodetiska ytan i ett geografiska området (fig. 17) [25, ss. 111–138] [2, ss. 113–138] [25, ss. 105–124] [7, s. 96].

När man utför mätningar för att skapa kartor som är plana, avbildar man krökta



**Figur 17.** Gauss geodetiska mätningar i Niedersachsen. (a) Longitud för Göttingen observatorium. Några städer och orter i det geografiska området Gauss undersökte - (1) Göttingen, (2) Inseisberg, (3) Hohenhagen, (4) Brocken, (5) Hills, (6) Lichtenberg, (7) Garssen, (8) Deister, (9) Falkenberg, (10) Hanselberg, (11) Elmhorst, (12) Bremen, (13) Garister, (14) Varel, (15) Jever, (16) Lehe, (17) Bruttendorf, (18) Altona, (19) Hamburg, (20) Lauenburg, (21) Wilsede.

ytor i tre dimensioner, där man i beräkningen tar med höjddifferenser mellan en tänkt ellipsoid och en geoid. Höjddifferensen kallas för geoidhöjden. En geoidyta är en nivåyta som bestäms av tyngdkraft som har samma tyngdkraftspotential och samma nivå som medelvattenytan. Ellipsoiden är jordklotets form som uppstår på grund av att jordens roterar runt sin egen axel varvid en centrifugalkraft uppstår. Effekten blir att jorden gärna vill slungas utåt vid ekvatorn varvid jorden tar form av en ellipsoid. Effekten motverkas av gravitationen men medför ändå att ekvatorns radie är ca 21 km större än polradien. Det var Newton som först publicerade teorin och senare på 1700–1800-talet ägnade vetenskapsmän åt att utföra triangulering för att se om Newtons teori stämde. Newton fick teorin från iakttagelser om månförmörkelsen där han noterat att “jordskuggans figur” inte var cirkulär i form. Från öst till väst hade den en större diameter än från norr till söder. Newton hänvisar också till mätningar gjorda om latitudskillnad som gett mätdata om att jordradien bör vara större vid ekvatorn. Newton menar att materialet är lättare vid ekvatorn, i det annars homogena material jorden består av, att materialet slungas ut vid ekvatorn på grund av jordens rotation [27, ss. 17–24] [28, ss. 33–34].

Från geoidens yta går vertikala lodlinjer som vid varje punkt är vinkelrät mot ytan. En lodavvikelse uppstår vilket är en vinkeldifferens mellan ellipsoidens normal och mellan lodlinjen (Idag används satellitsystem för att få noggranna mätningar). Mätning i terräng av lutande längder på jordytan kan ske med hjälp av en geodimeter. Mätningen kan också utföras med en teodolit där man mäter vinkeln från en position och till en eller flera andra positioner som är angivna. Med trigonometriska beräkningar kan man sedan få ut vinklar och längder i en triangel. Triangulering skapar ett triangelnät av flera efter varandra mätta trianglar i ett geografiskt område [27, ss. 17–24] [26] [9, ss. 882–889].<sup>2</sup>

### 9.3. Allmänna undersökningar av krökta ytor

Gauss arbete ute i fält 1822–1826 med geodetiska mätningar fick honom att skapa de teorier om krökta ytor och differentialgeometrin. I verket *Allmänna undersökningar av krökta ytor* publicerat år 1827 presenterade Gauss bland annat definitionen för en krökning hos en yta, han härledde ett uttryck för vinkeln mellan två linjer på en krökt yta samt vidare en sats för en triangel med en krökt yta och dess relaterade vinkla [26] [2, ss. 111–138] [9, ss. 882–889].

---

<sup>2</sup>Kartprojektion handlar således om att projektera över en tredimensionell kropp till en tvådimensionell yta. Det finns olika slags projektioner för olika slags kartor. Mercatorprojektionen visar korrekt riktning mellan punkter, medan andra slags projektioner tar hänsyn till avstånd mellan punkter eller area. Idag används olika sorters kartor också för att studera olika fenomen på jordens yta. Topografiska kartor har i historien ritats genom mätningar i fält där man tar mått på avstånd mellan olika positioner, riktning och lutning i fält. För att visa topologin i landformer används konturlinjer. Skalor visar hur mycket en area har skalats ner i storlek. Areella kartor är fotografier tagna från höjder med drönare eller flygplan där en mängd med fotografier pusslas samman för att visa ett område. LandSat-bilder är satellitbilder som tar fotografier av jordens yta med hjälp av synligt ljus och andra elektromagnetiska spektrum av ljus. Olika elektromagnetiska spektrum visar olika fenomen så som till exempel temperatur i en vulkan eller mängden av växtlighet på en yta. DEM-bilder (*Digital Elevation Models*) kan skapas i datorer och visar tredimensionella vyer av landformer i gråskala [29, ss. 189–213].

### 9.3.1. En ytas krökning

En parametriserad yta är mängden av alla punkter  $(x, y, z)$ , där koordinaterna  $x$ ,  $y$  och  $z$  skrivs som funktioner:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (9.1)$$

där  $u$  och  $v$  är ytans parametrar. Koordinaternas  $x$ ,  $y$  och  $z$  differentier kan då skrivas så som:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (9.2a)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (9.2b)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv. \quad (9.2c)$$

En båglängd  $ds$  definieras genom ekvationen  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , och insättning av koordinaternas differentier (9.2a) till (9.2c) i ekvationen  $ds^2$  ger:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)^2 = \dots \\ &= \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + 2 \left[ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right] dudv \\ &\quad + \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2 \\ &= E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Definitionen av funktionerna  $E$ ,  $F$  och  $G$  som Gauss skapade är således:

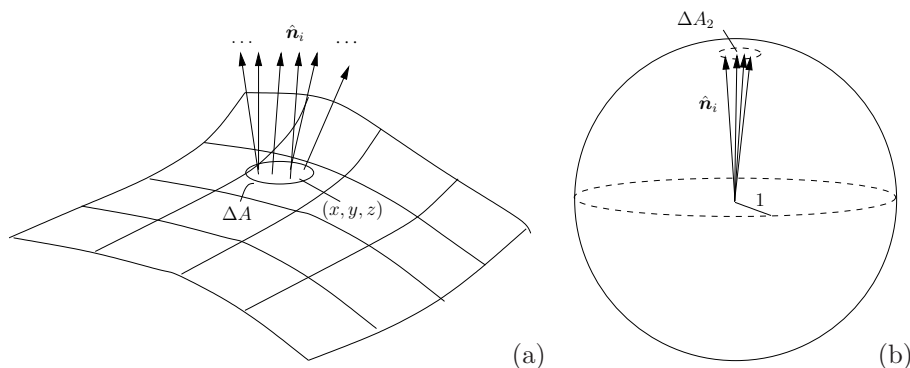
$$E(u, v) \equiv \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \quad (9.4)$$

$$F(u, v) \equiv \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (9.5)$$

$$G(u, v) \equiv \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2. \quad (9.6)$$

Gauss kom fram till det viktiga resultatet att egenskaperna för en yta beror endast på funktionerna  $E$ ,  $F$  och  $G$ . Dock gäller att  $E$ ,  $F$  och  $G$  beskriver ytans form, men inte dess läge eller orientering i rummet, det vill säga mer korrekt är att påstå att en yta beror endast på viktiga intrinsiska egenskaper man kan beräkna utifrån funktionerna  $E$ ,  $F$  och  $G$ .

Gauss införde vidare en definition för en ytas krökning  $K(x, y, z)$  i en punkt  $(x, y, z)$  på ytan. I definitionen tänker vi oss att punkten  $(x, y, z)$  omsluts av ett litet område  $\Delta A$  på ytan. Vi betraktar sedan mängden av alla enhetsnormaler  $\mathbf{n}_i$  genom  $\Delta A$  (fig. 18a). Om alla enhetsnormaler ritas in i en enhetssfär med utgångspunkt



**Figur 18.** (a) En yta vars krökning ska bestämmas i punkten  $(x, y, z)$ . Enhetsnormaler  $\hat{n}_i$  utgår från ett område  $\Delta A$  kring punkten  $(x, y, z)$ . (b) Samma enhetsnormaler  $n_i$  ritade i en enhetsfär, där de pekar ut mot en yta  $\Delta A_2$  på sfären.

i origo, definieras en area  $\Delta A_2$  vid enhetsnormalernas spetsar (Se figur 18b). Den ursprungliga ytans krökning definierades sedan av Gauss som:

$$K(x, y, z) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta A_2}{\Delta A}. \quad (9.7)$$

Gauss beräknade således gränsvärdet till:

$$K = \frac{1}{2H} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{2}{H} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right] \quad (9.8)$$

där  $H$  betecknar en funktion, som Gauss definierade så som:

$$H(u, v) \equiv \sqrt{E(u, v)G(u, v) - [F(u, v)]^2}. \quad (9.9)$$

### 9.3.2. En geodetisk triangel

Relationen mellan en krökning och en vinkelsumma för en geodetisk triangel är något Gauss tar upp i sitt verk. Han bevisar en viktig sats som handlar om krökningen hos en triangel. Om  $K$  är en ytans krökning, då får vi krökningsintegralen  $I$  över arean  $A$  genom:

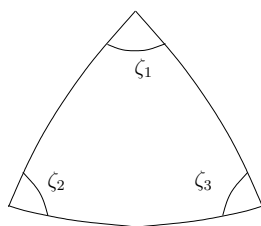
$$I = \iint_A K dA \quad (9.10)$$

Gauss bevisade att krökningsintegralen över en geodetisk triangel är lika med vinkelsumman av triangeln minus  $\pi$  (Se Figur 19):

$$I = \iint_A K dA = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - \pi, \quad (9.11)$$

Ett plan däremot har krökningen noll och trianglar i planet har vinkelsumman som är lika med  $\pi$  vilket ger oss en inblick i hur man kan betrakta plan gentemot krökta ytor i den icke-euklidiska geometrin (Se exempel kapitel 9.4.2 och figur 20).





Figur 19. En geodetisk triangel.

### 9.3.3. Vinkeln mellan två kurvor på en yta

En kurva (till exempel randen på en triangelyta som kan vara en del av en sfär eller likande) bestäms av hur parametrarna  $u$  och  $v$  förhåller sig till varandra. I beräkningen blir  $x$ ,  $y$  och  $z$  funktioner av parametrarna  $u$  och  $v$ . Den parametriska representationen av en kurva fås då av ekvationen  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  och  $z = z(u, v)$ . Gauss visade att om det från en punkt  $p = (u, v)$  utgår två riktningskurvor som ges av kvoten  $du_1 : dv_1$  och  $du_2 : dv_2$ , och vinkeln mellan kurvorna är vinkeln  $\alpha$  så gäller att:

$$\cos \alpha = \frac{Edu_1du_2 + F(du_1dv_2 + du_2dv_1) + Gdv_1dv_2}{\sqrt{Edu_1^2 + 2Fdu_1dv_1 + Gdv_1^2}\sqrt{Edu_2^2 + 2Fdu_2dv_2 + Gdv_2^2}} \quad (9.12)$$

Gauss kom vidare på resultatet som handlar om konform avbildning. Om en kurva böjs utan att den sträckas eller bryts av, kommer koordinatlinjerna  $u$  och  $v$ , som här är konstanter förbli samma och så också  $ds$ . Krökningen och alla egenskaper för ytan kommer vara de samma. Om vi har två ytor som har en ett-till-ettrelation till varandra där  $u_2 = u_2(u, v)$  och  $v_2 = v_2(u, v)$  och där  $u_2$  och  $v_2$  är koordinaterna för en punkt  $p$  på den andra ytan, samt om båglängds elementet  $ds$  är samma för de båda ytorna, då är det båda ytorna isometriska och har samma geometri och krökning. Gauss kallade resultatet för *Theorema Egregium* vilket betyder den utmärkta satsen [26] [2, ss. 111–138] [9, ss. 882–889].

## 9.4. Icke-euklidisk geometri

### 9.4.1. Pionjär inom icke-euklidisk geometri

Bland Leonardo da Vincis (1452–1519) sparade anteckningar finns en notering där han skrivit “Målandets vetenskap börjar med en punkt, sedan kommer linjen, planet kommer som nummer tre, som fyra kommer kroppen i planets klädedräkt”. Leonardo kan tänkas ha fått sin syn från Euklides *Elementa* och filosofiskt sammanställde han punkt, linje och planet samt en kropps geometri i flera dimensioner. Från den klassiskt grekiska matematiken har geometrin vävts samman genom århundradena och nya teorier har tillkommit. Hit hör genombrottet att frånga parallellaxiomet och skapa matematik om hyperbolisk geometri och den så kallade icke-euklidiska geometrin, teorier Gauss, János Bolyai samt hans släkting Wolfgang Bolyai samt N. I. Lobatjevskij revolutionerade. Gauss publicerade aldrig sitt arbete med icke-euklidisk geometri, dock finns Gauss anteckningar och dagböcker sparade, samt brevväxling han

fört om vilka teorier han skapat redan 1817. Lobatjevskij publicerade sina teorier 1829 och J. Bolyai år 1831. De visade oberoende av varandra att det femte axiomat av Euklides elementa inte tillhör de fyra andra axiomen [2, ss. 174–190] [9, s. 889] [17, s. 96].

#### 9.4.2. Hyperbolisk och elliptisk geometri

Gauss teorier i verket *Allmänna undersökningar av krökta ytor* visar en rad viktiga resultat, vilka vidareutvecklades av hans elev Bernard Riemann som generaliserade teorierna till högre dimensioner. Gauss metod att beräkna krökning visar teorin om att en sfärs yta inte är plan.

Euklides geometri som ansetts vara den enda geometrin, eller som I. Kant uttryckt att det var den enda geometrin hårt knuten till människan, fick ge plats för teorier om de elliptiska och hyperboliska geometrierna. Geometrin för krökt rumtid fick se ljuset. Riemanngeometrin gav inte bara nytt ljus för vår åskådning av geometrin, utan böjde också av ljuset i massiva rymdobjekts närhet.

Visst kan vi förstå om vi ser en sfär att dess yta inte är plan men den teorin är inte självklar om vi inte i teori kan visa att så är fallet. Gauss krökningen går att visa med enkla experiment. Om vi har en yta där krökningen blir samma var vi än mäter, så sägs ytan ha en konstant krökning. Den konstanta krökningen kan vara positiv, negativ eller lika med noll. En yta på en enhetssfär har en konstant positiv krökning, en cylinders yta har en krökning som är lika med noll medan ett torn med en inåtböjd yta har en krökning som är mindre än noll. Den konstanta positiva krökning på en enhetssfär kan vi illustrera med ett exempel där vi använder ekvation (9.11) från Gauss differentialgeometri. Säg att vi har:

$$I = \iint_A K dA = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 - \pi,$$

och vill beräkna  $K_s$  som är den konstanta positiva krökningen hos en enhetssfär med radien  $r = 1$ , och där vi också har villkoret att  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \frac{\pi}{2}$  för en triangel  $A$  på enhetssfären.

Varje triangel på enhetssfären som har tre räta vinklar (vilket kan beskrivas som åtta stycken trianglar som kan täcka en sfärs yta), har arean  $\lambda = \frac{1}{8} \cdot (4\pi r^2)$ . Eftersom  $r = 1$  blir  $\lambda = \frac{\pi}{2}$  (Se Figur 20).

För att beräkna den konstanta positiva krökningen  $K_s$  sätter vi in de kända variablerna  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \frac{\pi}{2}$  i ekvation (9.11):

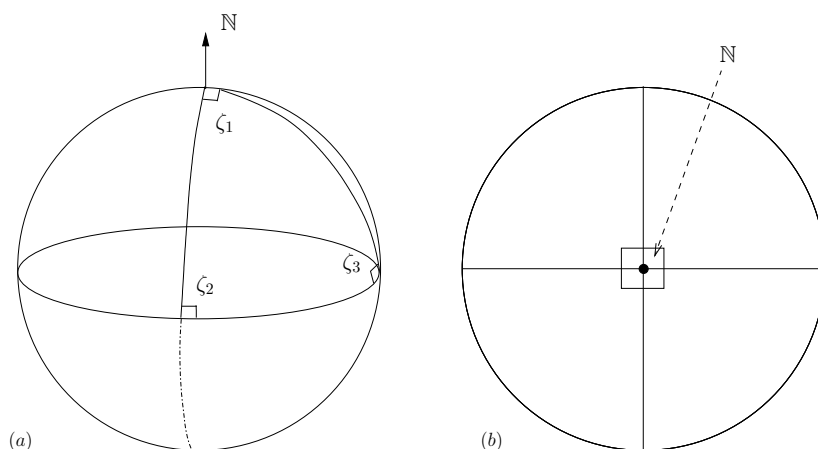
$$\iint_A K_s dA = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2},$$

där  $K_s$  är en konstant och kan brytas ut ur integralen:

$$K_s \iint_A 1 dA = \frac{\pi}{2}$$

Uttrycket  $(\iint_A 1 dA)$  är triangelns area  $\lambda$  och vi får således att  $K_s \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ , det vill säga  $K_s = 1$ , vilket är den konstanta positiva krökningen på en enhetssfär med ovan villkor satta.

Ytor i högre dimensioner än tre går inte att illustrera i rätt skala, vyn på ytan blir förvrängd. En sådan yta som har konstant krökning och som är negativ kallas för



**Figur 20.** (a) Triangel på enhetsfär med tre räta vinklar. (b) Enhetsfär sett i vy från ovan med fyra stycken trianglar med rät vinkel i norra hemisfären.

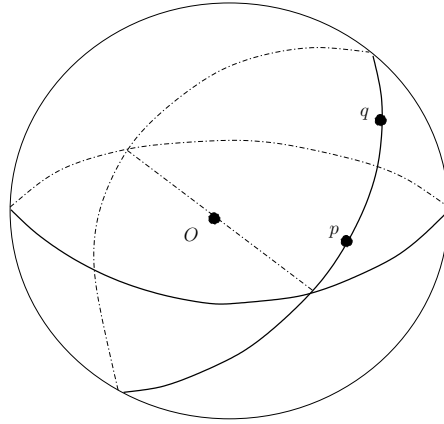
det hyperboliska planet. Liknade problem får vi när vi ska konstruera jordens yta på plana kartor, kontinenternas ytor förvrängs. Jordens yta har en positiv krökning. Jordens form och topologi kan konstrueras på flera olika sätt beroende på vad man vill visa. Mercatorprojektion innebär till exempel att man återger alla vinklar korrekt på en karta, vilket är viktigt vid navigation på hav eller i luften. Andra kartor tar hänsyn till areor men avstånden på papper kan inte återges korrekt på grund av krökningen, helst inte när avstånden är stora.

På samma sätt skapas modeller av hyperboliska plan där avstånden förvrängs. En sådan modell har konstruerats av den franska matematikern Henri Poincarés i slutet av 1800-talet. Om man återger det hyperboliska planet i en cirkel och i cirkeln ritar jämnstora trianglar, så ser trianglarna mindre ut desto närmare trianglarna är belägna vid cirkelns rand. Det blir en effekt på kartan i den hyperboliska världen. Skillnaden mellan euklidisk och hyperbolisk geometri är den att när avstånden blir stora blir linjer krökta i det hyperboliska planet.

Det tar oss till hur euklidisk och icke-euklidisk geometri skiljer sig åt, en matematik som Gauss, ungraren Johann Bolyai och ryssen Nicholas Lobatjevskij oberoende av varandra upptäckte och som blev revolutionerande och bröt mot flera tusen års tänkande med den euklidiska geometrin. Parallellaxiomet förkastades helt, om att en linje uppfattas som rät och obegränsad i matematisk mening (Att genom en given punkt går endast en linje, parallell med en given linje). I det hyperboliska planet satisfieras samtliga Euklides axiom annars, utom parallellaxiomet [21, ss. 79–85] [29, ss. 189–213] [9, s. 889].

Det existerar två icke-euklidiska geometrier, den hyperboliska och den elliptiska, och det var den hyperboliska geometrin Gauss, Bolyai och Lobatjevskij grundlade. Den hyperboliska geometrin kan definieras som så att genom en given punkt går oändligt många linjer parallellt med en given linje. Det hyperboliska rummet kan åskådliggöras på en cirkelskiva där en linje är en cirkelkorda. En triangelns vinkelsumma är mindre än  $\pi$  i det hyperboliska rummet.

Det var Gauss student Riemann som introducerade den elliptiska geometrin i



**Figur 21.** Det elliptiska rummet.

mitten av 1800-talet och teorin kallas Riemanngeometrin (Se Figur 21). Den elliptiska geometrin definierades som att en rät linje saknar parallella linjer genom en given punkt. Ett elliptiskt rum kan geometriskt tolkas som ytan av en sfär. Den krökta linjen är storcirkeln på sfären. Två punkter bestämmer den krökta linjen. Paralleller existerar inte, det finns inte två storcirklar som skär varandra. Här ses ett linjesegment som en båge av en storcirkel. En triangel ses som en sfärisk triangel där de sfäriska vinklarnas summa är större än  $\pi$ . Avståndet mellan två punkter  $p$  och  $q$  kan definieras som längden av den kortaste av storcirkelbågar som binder samman punkterna. Det vill säga ett linjesegment mellan punkterna  $p$  och  $q$  är den kortaste längden som förbinder punkterna till varandra i rummet. Linjesegmentet kalls också en geodetisk linje [22, ss. 80–82].

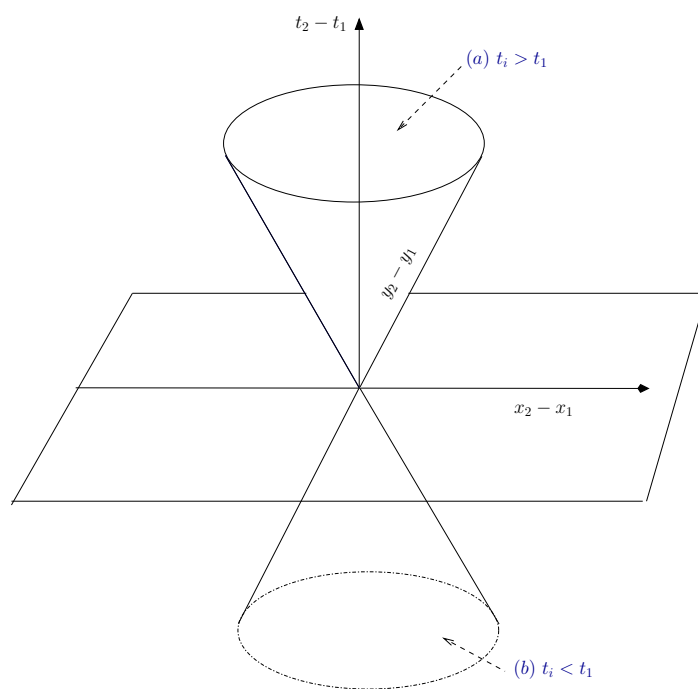
### 9.4.3. Einsteins fjärde dimension i rumtidskontinuum

Den tyska fysikern Albert Einstein (1879–1955) tog tiden som en fjärde dimension och skapade en fyrdimensionell rumtidskontinuum ca 60 år efter Riemann presenterat sitt arbete om icke-euklidisk geometri. I Einsteins rumtidskontinuum representerar en enskilt rumstidspunkt av koordinaterna  $x, y, z, t$  vilket sägs vara ett fysiskt läge vid en viss tidpunkt  $t$ . Avståndet mellan två punkter definieras då som:

$$\sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2} \quad (9.13)$$

där  $c$  är ljusets hastighet i vakuum. Om vi illustrerar en ljuskon med två fysiska rumskoordinater  $x$  och  $y$  kan vi se uttrycket inuti rottecknet  $c^2(t_2 - t_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$  vara en icke-negativ ljuskon med högsta läget i rumstidspunkten  $x_1, y_1, z_1, t_1$ . Ljuskonens inre består av alla rumstidspunkter  $x_i, y_i, z_i, t_i$ . Eftersom ingen hastighet kan överstiga ljusets hastighet, begränsas rumstidspunkterna. Manteln av konen representerar tiden som är större än  $t_1$ , det vill säga en tänkt framtid, medan den spegelvända konen representera tiden som är mindre än  $t_1$ , det vill säga det förflutna (Se Figur 22) [22, ss. 93–94].

Idag har geometrin växt och vi talar om matematisk rymd som innehåller hyperrymder till skillnad från de fysikaliska rymderna. Rymderna indelas i  $n$  variabler



**Figur 22.** Det fyrdimensionella rummet. (a) Tiden som är större än  $t_1$ , framtiden. (b) Tiden som är mindre än  $t_1$ , det förflutna.

istället för endast tre eller fyra dimensioner, eller som i strängteorins rumtidskontinuum, där det existerar 10, 11 eller 26 dimensioner. Dimensionsteorin tillhör idag det matematiska ämnet topologi [17, ss. 96–99].

## 10. DISKUSSION OCH SLUTSATS

Gauss var en genial teoretiker och vetenskapsman. Hans arbete sträcker sig till praktiskt taget alla områden inom matematiken. Framträdande i hans karaktär var att han var strikt med bevis och exaktheten i påståenden och teorier vilket fick honom och teckna ner sitt arv till eftervärlden, inte allt dock, eftersom han ville ha absolut klarhet och stringens i arbetet, publicerade han inte alltid sina resultat. Gauss hade vidare den egenheten att spänna sitt arbete om ett specifikt matematiskt ämne över flera områden när han förklarade en teori. Han kunde växla mellan algebra, komplex analys och talteori i bevisföringen. Därtill studerade han fysikaliska fenomen och astronomi, samt också geologiska vetenskaper så som geodesi och också kristallografi. Han försökte hitta samband i naturen och himlavalvet genom observationer av alla de slag. Ibland lade han saker åt sidan, vilket var fallet med kristallografi. Han lärde in mycket om ämnet men publicerade inget och började sedan ägna sig åt något helt annat <sup>1</sup>.

Tack vare källmaterial som hittats i hans hem och brevväxling som förekommit med andra matematiker som levde vid samma tid, kan man få en uppfattning om vad Gauss lämnade efter sig till vetenskapen. Gauss samlade arbete, brevväxling och hans dagbok blev efter hans död publicerade av vetenskapsakademien i Göttingen i nio samlade band (1863–1907) och där finner man att Gauss fick en nära vän i Farkas Wolfgang Bolyai under sin tid på universitet. F. W. Bolyai är känd för att ha publicerat teorier om den icke-euklidiska geometrin. Oberoende av Bolyai (samt också Lobatjevskij) löste Gauss teorier i icke-euklidisk geometri men han publicerade inte sina teorier i detta fält. Deras upptäckter var revolutionerande och en nytt och rikare synsätt på geometrin tillkom av deras arbete. En ny strömning i matematiken utvecklades och så också i filosofin, samhället och konsten. I källmaterialet har det visat sig att Gauss också upptäckt den dubbla periodiciteten av elliptiska komplexa funktioner  $f(z)$  där det existerar två olika komplexa tal  $\omega_1$  och  $\omega_2$  sådana att den elliptiska funktionen får formen  $f(\omega_1 + \omega_2)$  och därmed en dubbel periodicitet (Trigonometriska funktioner har enkelt periodicitet).

Förutom F. W. Bolyai som jag nämnt i kapitel om talteorin, förde Gauss också brevväxling och hade kontakt med till exempel naturforskaren och upptäcktsresande Alexander von Humboldt samt Sophia Germain, en fransk kvinnlig matematiker. Gauss samarbetade med Humboldt om utbyggandet av magnetiska mätstationer för geodetisk forskning. F. W. Bessel som ägnade sig åt matematik och astronomi och fick en professur i astronomi i Königsberg, hade Gauss som nära vän. Bessel ägnade sig åt geodetiska undersökningar liksom Gauss. Inom matematiken har Bessel fått ge namn åt Besselfunktionen.

Gauss hade intresserat sig för klassiska språk i ungdomen så det var inte självklart att på universitetet skulle välja matematik. När han lyckats konstruera den regelbundna 17-hörningen blev matematik ett naturligt val för honom. Gauss publicerade sina verk på latin och han var kanske en av de sista som publicerade avhandlingar

---

<sup>1</sup>Inom kristallografin studerade Gauss vinklar som de olika kristallernas geometriska form kan anta. Om Gauss levde i tiden där man fastställt elementarpartikelfysik för atomer, molekyler och kemiska bindningar, eller om han levde i vår tid när vi kan studera mineralogi och mineral kemi för att se hur kristaller tillväxer (faktorer och växelverkan av hetta, avkylning, sammansättning i magma eller lava, gas- och vätskeinhåll etc.) och bildandet av så kallade euhedra kristaller, då hade Gauss säkerligen ansett ämnet vara mer intressant.

och artiklar med det latinska språket. De skedde en modernisering på 1800-talet där artiklar och böcker började publiceras även på andra språk så som till exempel franska, engelska och tyska. Gauss verk om aritmetiska undersökningar om sju kapitel blev inte översatt från latin till engelska förrän år 1965. Eftersom verken var skrivna på latin kan det ha medfört att Gauss ursprungliga manuskript kanske inte blivit läst av många eftersom latin numera inte är det vetenskapliga språket eller ett språk som inte många studerar. Gauss matematiska teorier har däremot vävs på med 200 år av matematik. Det vi anser vara självklart i gymnasiala kurser med geometrisk tolkning av det komplexa talplanet eller hur vi ställer upp komplexa tal eller tal i talteorin och utför räkneoperationer var ett arv Gauss efterlämnade till matematiken och därifrån har ämnena växt och nya teorier skapas med tiden. Det fanns en oklarhet i de komplexa talen och hur man skulle hantera dem innan Gauss sopade undan luddigheten och sakligt åskådliggjorde dem i planet. De positiva och negativa fick en riktning och storlek med andra ord och fördes också vidare till andra matematiska områden så som till exempel talteorin och algebran. Det som verkat mystiskt blev nu praktiskt och användbart för tillämpning och teori.

Algebrans fundamentalsats var en teori som hängde med Gauss från att han publicerat doktorsavhandlingen 1799 där han skapat det första beviset för satsen till hans sista år när han publicerade det fjärde beviset. Fyra bevis skapade han om Algebrans fundamentalteori livet igenom och med insikten om den komplexa analysen som hänger samman med satsen. Oklarheten som funnit innan om komplex analys växer i varje nytt bevis Gauss gav för satsen.

Många av Gauss kollegor kom från välbärgade familjer men Gauss far hade varit en man som haft arbete som trädgårdsarbetare, murare och även haft andra ströjobb. Gauss släktingar var hantverkare och bönder som enligt tradition inte ägnat sig åt högre studier. Gauss fick studera i gymnasium, på universitet och vidare ägna sig åt forskarstudier, och till och med få sin doktorsavhandling publicerad tack vare hans mecenat Hertigen av Braunschweig som följt Gauss uppväxt och studier sedan Gauss var en ung grabb. När Gauss fick arbete som professor och föreståndare på Göttingens observatorium kan det ha berott på att Gauss mecenat avled i ett fältslag mot Napoleon och Gauss fick söka en annan inkomstkälla, han hade en familj att försörja och när han fick erbjudandet om arbetet vid Observatoriet löste detta hans ekonomiska bekymmer. Gauss hade också skapat beräkningar för Ceres bana på himlavalvet och vidare teorier att beräkna omloppsbanor för himlakroppar med endast få observationer vilket gjort honom vida berömd och bidrog till att han fick tjänsten på Göttingens observatorium.

År 1854, ett år innan Gauss avled fick han inbjudan att vara med när tågrälsen skulle invigas i Göttingen. Några månader tidigare hade han också besökt bygget av järnvägsspåren mellan Göttingen och Kassel. Gauss skapade således matematik, fysik och astronomiska beräkningar för vår tid som vi till exempel använder idag inom numeriska beräkningar och inom astrofysik och det var innan tågen ens börjat rulla på spåren i Göttingen. Gauss gav oss ett rikt arv som har vidareutvecklats i en väv genom 200 år. Från industrialismens framväxt till vår tids miljötänkande tillämpas Gauss teorier i en rad vetenskaper.



## TACK

Jag vill tacka mamma och pappa som var goda föräldrar, min make docent S. B. Lindström som varit mentor för mig genom universitetstiden inom programmering och matematik. Samtliga professorer på kurser inom matematik på Mittuniversitetet samt inom geovetenskap på Stockholms Universitet vill jag tacka för kunskap i matematik och geologiska vetenskaper. Vidare vill jag tacka svetsinstruktörer på utbildning på AMU center i Trollhättan som lärt mig teknik, matematik och fysik samt svetssteknologi från jag var 14 år och började som lärling i svetsbranschen, ett yrke jag arbetat med i många år innan jag började på universitetet. Framför allt vill jag tacka professor Cornelia Schiebold på Mittuniversitetet som varit handledare för examensarbetet och som jag också studerat ämnet talteori hos.

## Bilaga A. KOMPLEXA TAL

### *Komplexa tal på polär form*

Ett komplext tal  $z = a + bi$  kan transformeras till polär form och skrivs då som

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad (\text{A.1})$$

$r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  samt  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , där  $\theta$  är argumentet och  $r$  är absolutbeloppet av  $z$ .

Talet  $z = a + bi$  kan i det komplexa talplanet åskådliggöras med en vektor  $\mathbf{r}$  som har startpunkt i origo,  $\mathbf{r}_0$ , och slutpunkt  $\mathbf{r}_1$  i  $(a, b)$ .  $\mathbf{r}$  bildar vinkeln  $\theta$  med den positiva reella axeln och därmed får vi att

$$\begin{cases} a = r \cos(\theta) \\ b = r \sin(\theta) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

och vidare att

$$z = a + bi = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \quad (\text{A.3})$$

Vi har nu skrivit  $z$  på polär form.

### *Cirkelns ekvation*

Om centrumunkten är belägen i origo gäller att alla punkter på cirkeln uppfyller villkoret

$$|z| = r. \quad (\text{A.4})$$

Om centrumunkten av cirkeln är belägen i en punkt annan än origo, säg  $w = (a, b)$ , gäller att alla cirkelns punkter uppfyller  $|z - w| = r$ .

### *Talet $i$*

För talet  $i$  gäller  $|i| = 1$  och  $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2})$  samt  $\frac{1}{i} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})$ .

### *Multiplikation med $i$*

När  $z$  multipliceras med  $i$  vrids vektorn  $\mathbf{r}$  motsols  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , och när  $z$  multipliceras med  $-i$  vrids vektorn  $\mathbf{r}$  medsols  $\frac{\pi}{2}$ .

### *Potenser av komplexa tal*

de Moivres formel säger att om ett komplext tal har  $|z| = r = 1$ , så kan vi skriva  $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , och potensen av  $z$  blir då  $z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$  för  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad (\text{A.5})$$

för  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  de Moivres formel kan således lösa ekvationen  $z^n = w$ .

### Hörn i en regelbunden polygon

Hörnen för en regelbunden polygon får man genom att beräkna ekvationens rötter. Om vi har en ekvation av sorten:

$$z^n = w, \quad (\text{A.6})$$

där  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  och där  $n \in \mathbb{N}$  och  $w \in \mathbb{C}$  och talet  $w$  kan skrivas så som:

$$w = |w|(\cos(\alpha + k2\pi) + i \sin(\alpha + k2\pi)), \quad (\text{A.7})$$

för alla heltal  $k$ . Den polära formen av  $z$  kan vidare skrivas så som:

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad (\text{A.8})$$

och de Moivres formel ger således att:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \quad (\text{A.9})$$

Vi kan nu skriva att  $|z^n| = |w|$  och  $n\theta = \alpha + k2\pi$ , där  $k \in \mathbb{Z}$  och  $|z^n| \geq 0$ . Av det här kan vi få lösningen

$$\theta = \frac{\pi}{n} + \frac{k2\pi}{n}, \quad (\text{A.10})$$

$$|z| = |a|^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{A.11})$$

samt

$$|z| = z_k = |a|^{\frac{1}{n}} \left( \cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right) \right). \quad (\text{A.12})$$

Vi kan med hjälp av de Moivres formel bestämma potensen till ekvationen och lösa den.

$$z^n = (\cos(v) + i \sin(v))^n = \cos(nv) + i \sin(nv) \quad (\text{A.13})$$

## REFERENSER

- [1] BURTON, DAVID M., *The History of Mathematics. An introduction.* McGraw–Hill Companies Inc., sjunde upplagan, 2011.
- [2] G. WALDO DUNNINGTON, FRITZ-EGBERT DOHSE, JEREMY GRAY, *Gauss: Titan of science.* The Mathematical Association of America, femte upplagan, 2004.
- [3] CARUSI, ANDREA, Early Neo Deflections: A Viable, Lower-Energy Option. *Earth, Moon and Planets*, 96:81–94, 2005.
- [4] GAUSS, C. F., *New proof of the Theorem That Every Algebraic Rational Integral Function In One Variable can be Resolved into Real Factors of the First or the Second Degree.* Doktorsavhandling, C. G. Fleckeisen's, Helmstedt, 1799. Translated by E. Fandreyer.
- [5] THOMAS, BERTIL, *Naturvetenskapens milstenar.* Liber AB, första upplagan, 1999.
- [6] NEWTON, ISAAC S., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica.* Liber Läromedel, 1986. första boken.
- [7] ETTORE PICUTTI, LAURENT SCHWARTZ MED FLERA, HAROLD EDWARDS, *Stora matematiker: Från Fibonacci till Wiles.* Studentlitteratur, 2000.
- [8] KLINE, MORRIS, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, vol. 2. Oxford University Press, 1972.
- [9] KLINE, MORRIS, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, vol. 3. Oxford University Press, 1972.
- [10] THOMPSON, JAN, *Historiens matematik.* Studentlitteratur, 1991.
- [11] SAFF, E. B. OCH SNIDER, A. D., *Fundamentals of Complex Analysis with its Applications to Engineering and Science.* Pearson Education, Inc., tredje upplagan, 2003.
- [12] ROSEN, KENNETH H., *Elementary Number Theory and its Applications.* Pearson, Addison Wesley, femte upplagan, 2005.
- [13] UNENGE, JAN, *Människorna bakom matematiken.* Studentlitteratur, 1997.
- [14] VRETBLAD, ANDERS, *Algebra och geometri.* Gleerup, 1999.
- [15] GAUSS, CARL FRIEDRICH, *Disquisitiones Arithmeticae.* Yale University Press, 1965.
- [16] HARDY, G. H. OCH WRIGHT, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford University Press, Oxford, femte upplagan, 1779.
- [17] CRILLY, TONY, *Matematik: Vad som är värt att veta.* Lind & Co., 2012.
- [18] VÄNNMAN, KERSTIN, *Matematisk Statistik.* Studentlitteratur, 2:8 upplagan, 2002.

- [19] ADAMS, ROBERT A., *Calculus a Complete Course*. Addison Wesley Longman Ltd., fjärde upplagan, 1999.
- [20] ANTON, HOWARD OCH RORRES, CHRIS, *Elementary Linear Algebra*. John Wiley & Sons, Inc., åttonde upplagan, 2000.
- [21] DAHL, KRISTIN, *Den fantastiska matematiken*. T. Fischer och Co., 1991.
- [22] KARUSH, WILLIAM, *Matematisk uppslagsbok*. Walhström & Widstrand, 1970.
- [23] JAMES, GLYN, *Advanced Modern Engineering Mathematics*. Pearson, Prentice-Hall, tredje upplagan, 2004.
- [24] NESSE, WILLIAM D., *Introduction to Mineralogy*. Oxford University Press, Inc., 2009.
- [25] STRUIK, DIRK J., *Lectures on Classical Differential Geometry*. Dover Publication, Inc., andra upplagan, 1988.
- [26] GAUSS, CARL FRIEDRICH, *General Investigations of Curved Surfaces*. Dover Publications, Inc., 2005.
- [27] OLA HALL, STEFAN ENE OCH ULF JOHANSSON, GÖRAN ALM, *Kartografi och geografisk information*. Studentlitteratur, 1:7 upplagan, 2003.
- [28] NEWTON, ISAAC S., *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Liber Läromedel, 1986. andra och tredje boken.
- [29] STEPHEN MARSHARK, ALLAN LUDMAN, *Laboratory Manual for Introductory Geology*. W. W. Norton and Company, Inc, 2010.