

”Ibland är det svårt att veta om lika med betyder att det är lika mycket eller om det betyder svaret”

En kvalitativ fallstudie om elevers förståelse för likhetstecknet och dess innebörd

Julia Cajonberg

Huvudområde: Matematik
Högskolepoäng: 15hp
Termin/år: VT-19
Handledare: Helena Johansson
Examinator: Andreas Lind
Kurskod/registreringsnummer: MA028A
Utbildningsprogram: Grundlärare med inriktning mot arbete i förskoleklass och årskurs 1–3

Sammanfattning

Syftet med denna studie är att undersöka vilka möjligheter elever i årskurs 1–3 har för att utveckla en förståelse för likhetstecknet samt vilken förståelse för likhetstecknet elever i årskurs 1–3 visar att de faktiskt har. Tre observationer genomfördes hos en lärare för att se hur läraren undervisade om, benämnde och förklarade likhetstecknet. Därefter genomfördes ett test med sju elever för att undersöka vilken förståelse för likhetstecknet de har. Som uppföljning av testet, intervjuades nio elever i grupper om tre för att undersöka vilken förståelse för likhetstecknet eleverna har. Observationerna, testet och intervjuerna visade att läraren benämner likhetstecknet som "lika med" samt att majoriteten av eleverna har en relativt välutvecklad förståelse av likhetstecknet, då de med egna ord kan förklara och visa på att det ska vara lika mycket på vardera sida av likhetstecknet för att likhetstecknet ska kunna användas. Genom intervjuerna med eleverna framkom det att eleverna fått arbeta med olikhetstecknet "skilt från" och att det underlättade deras förståelse för likhetstecknets betydelse. De har även fått arbeta med klossar och brukar regelbundet arbeta med likhetstecknets betydelse i undervisningen, främst i deras lärobok där det är ständigt återkommande.

Nyckelord: algebra, fallstudie, grundskola, likhetstecknet, observationer, årskurs 1–3.

Innehållsförteckning

1 INLEDNING	1
2 BAKGRUND	3
2.1 Algebra i styrdokumentet	3
2.2 TIMSS	4
2.3 Definition av begrepp	4
2.3.1 Likhetstecknet	4
2.3.2 Algebra	5
2.4 Algebrakunskaper och förståelse för likhetstecknet	5
2.4.1 Elevers olika förståelse för likhetstecknet	5
2.4.2 Undervisning om likhetstecknet i skolan	7
2.5 Teoretisk utgångspunkt	9
3 SYFTE OCH FRÅGESTÄLLNINGAR	11
4 METOD OCH MATERIAL	12
4.1 Metodval	12
4.2 Validitet och reliabilitet	12
4.3 Observationer	13
4.3.1 Urval	14
4.3.2 Genomförande av observationer	14
4.3.3 Metoddiskussion	15
4.4 Intervjuer	15
4.4.1 Urval	15
4.4.2 Genomförande av intervjuer	16
4.4.3 Metoddiskussion	16
4.5 Forskningsetiska principer	17
4.6 Bearbetning av data	18
5 RESULTAT	19
5.1 Resultatet från observationerna	19
5.1.1 Lärares undervisning och lektionernas upplägg	19
5.1.2 Elevernas delaktighet och förståelse	22
5.2 Resultatet från testet	23
5.2.1 Elevernas svar på testen	24

5.2.2 Elevernas resonemang om deras svar	25
5.3 Resultatet från intervjuerna	26
5.3.1 Elevernas förståelse för likhetstecknet	26
5.3.2 Elevernas upplevelse av att arbeta med likhetstecknet.....	28
5.4 Sammanfattning av resultatet.....	29
6 DISKUSSION	31
6.1 Resultatdiskussion.....	31
6.1.1 Lärarens undervisning och elevers förståelse	31
6.2 Reflektion av metodval.....	33
6.3 Tillförlitlighet.....	34
6.4 Slutsats	35
6.5 Vidare forskning och avslutande kommentarer.....	35
7 REFERENSER	37
8 BILAGA 1 – MISSIVBREV.....	40
9 BILAGA 2 - TESTFRÅGOR TILL ELEVER	41
10 BILAGA 3 – INTERVJUFRÅGOR TILL ELEVER.....	42
11 BILAGA 4 – OBSERVATIONSSCHEMA.....	43

1 Inledning

Dagens samhälle kräver människor som kan fatta välgrundade beslut i vardagen, i de olika valsituationer som uppstår. Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att ta sunda och genomtänkta beslut. Förutom detta är kunskaper i matematik en förutsättning för att följa med och förstå den tekniska, digitala, samhällsliga och sociala utvecklingen som hela tiden sker i det moderna samhälle vi lever i idag. Genom undervisning i matematik är målet att elevers intresse för matematik utvecklas, att eleverna utvecklar sina kunskaper om matematik och dess användning i vardagen och inom olika områden (Skolverket, 2018a).

Bråting och Madej (2017) hävdar att ett av de områden som svenska elever presterar sämst inom, är algebra. Detta visar internationella studier såsom Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), där svenska elever presterat under genomsnittet i algebra, även om eleverna förbättrat sina resultat överlag inom matematik de senaste åren. Senaste TIMSS-undersökningen från 2015 visar att elever i årskurs 4 och årskurs 8 presterar bättre i matematik än de gjorde i TIMSS 2011. Däremot presterar Sverige fortfarande lägre än andra länder i EU. En av anledningarna till detta tros vara elevers missuppfattningar av likhetstecknets betydelse (Skolverket, 2016). Enligt Skolverket (2008) tror många elever att likhetstecknet betyder "det blir" eller att det är en signal på att något ska genomföras. Denna uppfattning av likhetstecknet försvårar elevers fortsatta lärande och utveckling inom matematik, då det skapar svårigheter för eleverna att till exempel lösa ekvationer och räkna med bråk. Grønmo (2005) menar att elever som inte förstår likhetstecknets innebörd skulle ha svårt att lösa uppgifter som $8 = _ + 7$, då många elever skulle skriva 15 på den tomma raden. Detta är ett exempel där eleverna ser likhetstecknet som en symbol för att en handling ska utföras istället för att det ska vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet.

Under större delen av min grundskoletid förklarade många lärare likhetstecknet som "det blir", vilket gjorde att jag själv alltid haft den uppfattningen av likhetstecknet. Inte förrän jag började i årskurs 6 fick jag höra talas om balansmetaforen, att likhetstecknet kan ses som en våg där båda sidor ska väga lika mycket. Det var egentligen inte förrän då som jag egentligen förstod likhetstecknets faktiska innebörd. Många elever missförstår än idag likhetstecknet och dess innebörd och får inte lära sig den riktiga definitionen förrän långt

senare i grundskolan när det redan skapat problem för eleverna. Därför har jag valt att undersöka hur lärare undervisar om likhetstecknets innebörd i årskurs 1–3 och vilken förståelse för likhetstecknets innebörd elever faktiskt har.

2 Bakgrund

I detta kapitel redogörs för hur algebra beskrivs i styrdokumentet och resultat från den internationella undersökningen TIMSS. Vidare definieras begrepp som är relevanta för studien och därefter presenteras relevanta resultat från olika forskningsartiklar, rapporter och studier om algebrakunskaper och förståelse för likhetstecknet. Till sist presenteras den teoretiska utgångspunkten för studien.

2.1 Algebra i styrdokumentet

I grundskolans läroplan (Skolverket, 2018a) beskrivs det att eleverna genom undervisning i matematikämnet bland annat ska utveckla kunskaper inom matematik för att kunna formulera och lösa problem, lära sig och använda matematiska begrepp samt symboler och andra tecken. Forskning visar på att det är viktigt att elever så tidigt som möjligt får bekanta sig med och utveckla kunskaper inom algebra, då det är viktigt för deras fortsatta lärande (Skolverket, 2017b). Inom området algebra ingår bland annat ekvationer, uttryck, att se och förstå likheter och olikheter samt likhetstecknets betydelse i årskurs 1–3 och 4–6 (Skolverket, 2018a). Utvärderingar och granskningar som gjorts av matematikundervisningen i Sverige visar att elever i svensk skola behöver utveckla sina kunskaper inom algebra då de har dålig förståelse för algebraiska begrepp. Eleverna missuppfattar bland annat vad likhetstecknet innebär och betyder (Skolverket, 2008). Detta tros bero på att eleverna räknar enskilt en stor del av undervisningstiden. Det innebär att eleverna blir begränsade i deras förmåga att lösa uppgifter då de inte får det stöd de behöver i deras utveckling av förståelse för bland annat algebra och likhetstecknet (Skolverket, 2017b). Vidare skriver Skolverket att kursplanen i matematik lyfter att elever i årskurs 1–3 bland annat ska arbeta med likhetstecknets betydelse och matematiska likheter inom algebra. Eleverna ska kunna förstå och använda matematiska begrepp, så som likhetstecknet, på rätt sätt samt att eleverna ska få utveckla och träna på att kommunicera och resonera inom matematiken. Detta förbereder eleverna väl inför högre årskurser då eleverna ska utveckla förståelse för obekanta tal och variabelbegreppet (Skolverket, 2017b).

2.2 TIMSS

Trends in International Mathematics and Science study (TIMSS) är en internationell studie som undersöker elevers kunskaper i naturvetenskap och matematik i årskurs 4 och 8 vart fjärde år. Studien undersöker även elevers attityder till dessa ämnen. I TIMSS 2015 deltog 57 länder och nästa studie genomförs 2019. Sverige deltog för tredje gången med årskurs 4 och årskurs 8 deltog för femte gången i TIMSS 2015 (Skolverket, 2016).

TIMSS 2015 visar att svenska elever i årskurs 4 och 8 har förbättrat sina resultat i matematik sedan 2011, men eleverna presterar ändå under genomsnittet (Skolverket, 2016). Skolverket (2008) släppte en analysrapport från TIMSS 2007 som visade att många svenska elever utläser likhetstecknet som att något ska genomföras eller som "det blir", då de tror att svaret alltid skrivs till höger om likhetstecknet (Skolverket, 2008). Vidare skriver Skolverket (2008) att i grundskolans tidigare år är det vanligt att likhetstecknet används på det sättet, vilket gör det svårt för eleverna senare i skolan då deras uppfattning av likhetstecknet som något som ska genomföras eller som "det blir" lever kvar. Analysrapporten visade att elever i både årskurs 4 och 8 uppfattar likhetstecknet som något som ska genomföras eller som "det blir", istället för att det ska vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. Det resulterade i att det blev svårt för eleverna att lösa ekvationer på rätt sätt (Skolverket, 2008).

2.3 Definition av begrepp

Nedan definieras hur aktuella begrepp används i detta arbete.

2.3.1 Likhetstecknet

Likhetstecknet ($=$) är tecknet som används för att symbolisera att två sidor av en beräkning är värd lika mycket (Byrd, McNeil, Chesney & Matthews, 2015). Enligt Grønmo (2011) kan likhetstecknet ses som dynamiskt eller statiskt, medan Stephens et.al (2013) istället använder begreppen operationell och relationell om likhetstecknets betydelse. Den dynamiska och operationella tolkningen uppmanar till att utföra en beräkning. Det innebär att likhetstecknet ses som "det blir", där svaret kommer efter tecknet. Den statiska och relationella tolkningen kan ses som en våg mellan det vänstra och högra ledet. Likhetstecknet har i denna tolkning en djupare innebörd, då definitionen baseras på att det är relationen mellan de två leden som

jämförs (Grønmo, 2011; Stephens et.al., 2013). I detta arbete kommer begreppen operationell och relationell användas.

2.3.2 Algebra

Algebraisk kunskap beskrivs enligt Skolverket (2017b) som att beräkningar kan uttryckas på ett generellt sätt genom till exempel bokstavsbeteckningar istället för tal. Inom algebra ingår även kunskaper om innebörden av likhetstecknet, bokstavsbeteckningar samt variabelbegreppet. Detta är grunden för elevernas vidare utveckling av kunskaper om grafer, formler, algebraiska uttryck och ekvationer. Grevholm (2014) skriver att tidigare har algebra ansetts höra till de högre årskurserna i grundskolan, på grund av att det ansetts vara för svårt för yngre elever att förstå algebra. Eftersom svenska elevers prestationer i internationella studier varit svaga i algebra har det resulterat i att algebra blivit högst centralt även i de lägre årskurserna på senare år. Vidare beskriver Grevholm (2014) att algebra handlar om själva strukturen inom aritmetiken, vilket kan beskrivas som själva räknandet. Algebran kan ses som ett sätt att på ett kortfattat sätt beskriva och sammanfatta hur aritmetiken fungerar, vad det finns för mönster och regelbundenheter. Olteanu (2014) anger några argument till varför elever bör möta algebra i skolan, så som att samhället idag har högre krav på matematiska kunskaper och grunden för vidare matematiska studier är algebra.

2.4 Algebrakunskaper och förståelse för likhetstecknet

Under detta avsnitt presenteras relevanta resultat från olika forskningsartiklar, rapporter och studier.

2.4.1 Elevers olika förståelse för likhetstecknet

Bråting och Madej (2017) hävdar att ett av de områden som svenska elever presterar sämst inom, är algebra. Detta visar internationella studier såsom TIMSS, där svenska elever presterat under genomsnittet i algebra, även om eleverna förbättrat sina resultat överlag inom matematik de senaste åren. Blanton et al. (2015) skriver om en studie där de under ett års tid undersökte konsekvenserna av att introducera algebra i tidiga årskurser. I studien jämfördes elever i årskurs 3 som följde den traditionella matematikundervisningen med elever i årskurs 3 som fick specialanpassad algebraundervisning. I den specialanpassade

algebraundervisningen fick eleverna bland annat lära sig och förstå betydelsen av likhetstecknet samt att de genom olika arbetssätt fick utöka sin förståelse för likhetstecknet. Studien visade bland annat att eleverna som hade fått specialanpassad algebraundervisning var bättre på att använda likhetstecknet på rätt sätt samt att de förstod ekvationer på ett bättre sätt än de elever som följt den traditionella matematikundervisningen (2015).

Både Grønmo (2005) och Löwing & Kilborn (2003) menar att en operationell förståelse av likhetstecknet ger problem när elever exempelvis ska lösa ekvationer, teckna uttryck eller förenkla bråk. Grønmo (2005) ger exempel på uppgiften $7 = _ + 5$, där en elev med en operationell förståelse för likhetstecknet skriver 12, det vill säga att eleven adderar 7 och 5. Det exemplet visar på att eleven inte förstår likhetstecknets betydelse.

Både Essien (2009) och Grønmo (2005) skriver att likhetstecknet är en av de mest missförstådda symbolerna inom matematiken. Den vanligaste tolkningen av likhetstecknet är att det betyder "det blir", vilket är den operationella tolkningen. Det innebär att uppfattningen är att svaret av en beräkning ska stå till höger om likhetstecknet. Som beskrivits ovan kan likhetstecknet uppfattas som en signal på att något ska genomföras och i grundskolans tidigare år är det vanligt att likhetstecknet förklaras som "det blir" (Skolverket, 2008). Ett resultat av detta blir att den operationella uppfattningen av likhetstecknet lever kvar högt upp i åldrarna, vilket gör det svårt för elever att exempelvis lösa ekvationer. Enligt Sterner (2012) så svarar majoriteten av elever i årskurs 1–6 att svaret på uppgiften $8 + 4 = _ + 5$ blir 12 eller 17, vilket innebär att dessa elever inte förstår likhetstecknets innebörd. De har den operationella tolkningen av likhetstecknet.

Stephens et.al. (2013) genomförde en studie där 290 elever i årskurs 3–5 från USA deltog, där syftet var att undersöka vilken förståelse för likhetstecknet dessa elever hade. Eleverna fick genomföra ett test där resultaten sedan analyserades. Studien visade att i princip ingen av dessa elever hade en relationell förståelse av likhetstecknet. Många beskrev likhetstecknet som "det ger det rätta svaret", vilket innebär att dessa elever har stora problem med att förstå uppgifter där det finns beräkningar på båda sidor av likhetstecknet, såsom $5 + 3 = _ + 4$. Essien (2009) genomförde en studie i Sydafrika där elevers förståelse för likhetstecknets betydelse i årskurs 8 och 9 undersöktes. Studien visade likt Stephens et.al. (2013) att elever i dessa årskurser hade uppfattningen av att likhetstecknet var en enkelriktad symbol som innebar att något skulle genomföras. Grønmo (2011) skriver om en norsk studie, där norska

elever hade som mest problem med de uppgifter där likhetstecknet inte skulle uppfattas som något som skulle utföras. $3 + 5 = \underline{\quad}$ och $9 + 1 = \underline{\quad}$ är exempel på uppgifter där likhetstecknet tolkas som att något som ska utföras, vilket gick bra för eleverna att genomföra. $6 + 6 = 8 + \underline{\quad}$ eller $15 - \underline{\quad} = 17 - 5$ är exempel på uppgifter som kräver att eleverna måste reflektera över vad varje led är värd, vilket var svårare för elever med en felaktig uppfattning av likhetstecknet att förstå och genomföra.

TIMSS-undersökningen 2007 visade att de flesta svenska elever i årskurs 8 fortfarande hade den operationella uppfattningen av likhetstecknet, vilket gjorde att det blev omöjligt för dessa elever att lösa ekvationer (Skolverket, 2017). Vidare skriver Skolverket (2017) att möjligheten för elever att lösa ekvationer som innehöll x-termer i båda led var begränsad vid en operationell förståelse av likhetstecknet. Allt för få elever hade utvecklat den relationella uppfattningen av likhetstecknet (Skolverket, 2017). Essien (2009) skriver att likhetstecknet är en högst viktig del inom algebran att möta och förstå i yngre år, då det är grunden till deras vidare lärande och utveckling. Elever måste från start förstå att likhetstecknet inte indikerar att svaret följer, utan att det indikerar en relation mellan båda sidor, där båda sidor är värda lika mycket. Därför måste lärare lägga ner tid på att arbeta med och diskutera likhetstecknets betydelse, så att förståelsen för tecknet inte blir operationellt.

2.4.2 Undervisning om likhetstecknet i skolan

Blanton et al. (2018) skriver att många barn introduceras till den operationella synen på likhetstecknet innan barnen börjar skolan, vilket bidrar till att många elever fortsätter att tolka likhetstecknet som något som ska genomföras även när de börjat skolan. Både Essien (2009) och Blanton et al. (2018) menar att det är väldigt viktigt för lärare att tänka på hur likhetstecknet introduceras och förklaras, då det är grunden för elevers framtida förståelse och uppfattning av likhetstecknet. En felaktig grund skapar hinder för elevers framtida lärande och utveckling. Ahlberg (2005) menar att ett bra sätt att introducera likhetstecknet för yngre barn är genom att använda en våg med två vågskålar. För att vågskålarna ska vara i samma höjd, behöver det vara samma mängd i respektive vågskål. Det behöver alltså vara lika mycket i båda skålarna. Läggs det i en vikt som väger 1kg i ena skålen, så måste det läggas i en vikt som väger lika många kilogram i den andra vågskålen. Det ger en tydlig bild av likhetstecknets betydelse. Står det 10 på ena sidan av likhetstecknet, då ska det vara lika mycket på andra

sidan, det vill säga 10 i det här fallet. Elever kan utveckla en bättre förståelse för likhetstecknet genom diskussioner och användning av konkret material.

Essien (2009) förespråkar en introduktion av likhetstecknet efter det att eleverna är bekanta med begreppen "mer" eller "mindre". När eleverna blivit säkra på betydelsen av "mer" eller "mindre", kan likhetstecknet introduceras och efter det kan additions- och subtraktionssymbolerna presenteras för eleverna. Författaren menar att eleverna är mer benägna att få en relationell uppfattning av likhetstecknet genom en introduktion likt denna. Även Hattikudir och Alibali (2010) diskuterar hur likhetstecknet bör introduceras efter att elever har förstått mer eller mindre och speciellt efter att de har arbetat med olikhetstecknen "större än" och "mindre än" ($>$ $<$). En studie gjord av författarna visade att elever som jämförde likhetstecknet med "större än" och "mindre än" symbolerna visade större förståelse för likhetstecknet, än elever som inte gjorde detta. De elever som jämförde symboler var också bättre på att genomföra så kallade luckuppgifter som $2 + _ = 3 + 1$ samt att de kunde definiera likhetstecknet och dess betydelse på ett bättre sätt än de andra eleverna. Vidare skriver författarna att en undervisning där elever får arbeta med likhetstecknet och olikhetstecknet "skilt från" (\neq) genererade i att fler elever tillägnade sig den relationella tolkningen av likhetstecknet i jämförelse med en undervisning där eleverna enbart arbetade med likhetstecknet (Hattikudir & Alibali, 2010)

Luckuppgifter så som $5 + 2 = 3 + _$ är ett enkelt sätt för elever att träna på den relationella uppfattningen av likhetstecknet, vilket behövs vid ekvationslösningar. Detta bör eleverna tidigt få möjlighet att träna på. Ahlberg (2005) menar att elevers uppfattning av likhetstecknet annars kommer att vara operationell om de enbart beräknar uttryck som $6 - 3 = _$, då elevernas uppfattning blir att svaret alltid skrivs till höger om tecknet. För att främja elevers algebraiska kunskaper och utveckling bör de uppgifter som elever gör följas upp av reflektioner och diskussioner, både i mindre grupper och i helklass. Elever behöver få tid till diskussion och reflektion där de får beskriva vad de tänker och varför de tänker så. På det här sättet fördjupas elevers förståelse av att likhetstecknet inte alltid är en signal på att något som ska genomföras (Grønmo, 2011).

Som lärare är det viktigt att tänka på språket och vilka formuleringar som används (Löwing & Kilborn, 2003). Många gånger görs språket mer komplicerat än nödvändigt, eller att begrepp och metoder får informella namn. För att underlätta den språkliga förståelsen kan

undervisningen konkretiseras, men då behöver det material och exempel som används vara genomtänka och vara ett stöd för språket. Ett exempel kan vara att använda sig av klossar, där eleverna visar att det ska vara lika många klossar på vardera sida av ett likhetstecken (Curcio & Schwartz, 2011). Löwing och Kilborn (2013) menar att med hjälp av språket tillägnas matematisk information, som sedan bearbetas, kommuniceras och till sist konstrueras ny matematisk kunskap. Eftersom vi tolkar den nya informationen utifrån tidigare erfarenheter och de förkunskaper vi har, är det viktigt att lärare försöker att konkretisera det de undervisar om. För att de nya matematiska kunskaperna ska vara korrekta, är det även viktigt att språket som används är korrekt. Därför är det inte alltid bra att förenkla matematiska begrepp, termer eller regler, då det kan innebära att eleverna lär sig fel innebörd av begreppen, termerna eller reglerna (Löwing & Kilborn, 2003). Essien (2009) skriver att det även är viktigt att läroböcker i matematik använder sig av olika bilder och tal för att demonstrera likheter samt att uppgifterna är utformade för att främja den relationella uppfattningen av likhetstecknet. Lärare bör också genom lärarhandledningar få stöttning i hur de bör introducera och arbeta med innebörden av likhetstecknet. Emanuelsson, Johansson, Ryding och Wallby (2005) skriver att elevers matematiska inläring blir begränsad om de bara arbetar enskilt i en lärobok. Eleverna behöver få möjlighet att lyssna på andra elevers tankar och argument samt få resonera och argumentera om sina egna lösningar och tankar. Det lär sig eleverna väldigt mycket av, menar författarna.

2.5 Teoretisk utgångspunkt

Fokus i denna studie är på språket och det sociala samspelet i matematikundervisningen, vilket gör att den sociokulturella lärandeteorin är den teoretiska utgångspunkten i detta arbete. De slutsatser som kommer fram i denna studie kan bli påverkade av den teoretiska utgångspunkten som valts, eftersom det påverkar vad som ses i studien. Med språk menas hur likhetstecknet benämns, förklaras och huruvida synen på likhetstecknet är operationellt eller relationellt.

Matematik är en social aktivitet där både lärare och elev samt elev och elev samspelar vid exempelvis lärarledd undervisning, diskussioner och vid självständigt arbete, om läraren låter eleverna diskutera och reflektera tillsammans. Vygotskij såg lärande ur ett socialt sammanhang, då han menade att kunskap växer fram genom samspel mellan elev och lärare

samt mellan lärare och elev (Säljö, 2012). Vidare skriver författaren att språket är centralt inom den sociokulturella lärandeteorin, då språket ses som grunden för kunskaps- och språkutvecklingen hos människor. Det är genom både det skriftliga och det talande språket som vi kommunicerar med andra människor samt blir tänkande varelser. Det innebär att språket fungerar på två olika nivåer – språket inom oss själva och språket mellan människor (Säljö, 2012). Matematiken innehåller ett krångligt och svårt språk, menar Löwing (2006). Som lärare är det därför viktigt att vara medveten om detta, men lösningen är inte att använda ett vardagsspråk istället för ett matematiskt språk. Då hindras eleverna från att utveckla sin förståelse för det matematiska språket. Lösningen är istället att eleverna successivt ska utveckla sitt språk, för att de ska kunna förstå och kommunicera på det matematiska språket.

Emanuelsson et.al. (2005) skriver att läraren behöver hjälpa eleverna genom att tydliggöra och utveckla deras tankar. Elevers kunskapsutveckling inom matematik blir mycket ineffektivt om de enbart arbetar enskilt i en lärobok. Eleverna behöver tala matematik med varandra, lyssna till andras argument och argumentera för sina egna tankar och lösningar. Genom att läraren, som är mer kunnig än eleven, ger stöd och ställer frågor som fokuserar på det som är viktigt att tänka på, kan eleven ta sig vidare i sin kunskapsutveckling. Det brukar benämnas som *scaffolding*, vilket är centralt inom den sociokulturella lärandeteorin (Säljö, 2012).

3 Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är att undersöka vilka möjligheter elever i årskurs 1–3 har för att utveckla en förståelse för likhetstecknet samt vilken förståelse för likhetstecknet elever i årskurs 1–3 visar att de faktiskt har. Frågeställningarna för detta arbete kommer därför att vara:

- Hur undervisar lärare i årskurs 1–3 om likhetstecknet?
- Vilken förståelse har elever i årskurs 1–3 för likhetstecknet och dess innebörd?

4 Metod och material

I kapitel 4 motiveras vilka metoder som använts och varför dessa valts att användas. Forskningsetiska principer lyfts samt att det redogörs för hur bearbetningen av data från studien har gått till.

4.1 Metodval

För att besvara syftet och frågeställningarna har en kvalitativ fallstudie genomförts. En fallstudie är en datainsamlingsmetod där en företeelse systematiskt studeras på djupet. För att fallstudien ska vara av hög kvalitet används vanligtvis fler metoder (Merriam, 1994). I denna fallstudie har tre metoder använts: observationer (frågeställning 1 och 2) ett test (frågeställning 2) och intervjuer (frågeställning 2). Totalt har tre observationer genomförts och dessa genomfördes under en och samma vecka i en årskurs 3 som går på en kommunal skola i en mellanstor stad i Sverige. Efter att sista observationen genomfördes, fick de elever som godkänt sin medverkan i studien göra ett test (bilaga 2). Inspiration till testet kommer från bedömningsstödet i matematik (Skolverket, 2018b). Efter att eleverna gjort testet, analyserades elevernas svar. Utifrån deras svar, valdes nio elever ut. I grupper om tre intervjuades sedan eleverna för att undersöka vilken förståelse för likhetstecknet och dess innebörd eleverna har samt att eleverna fick diskutera och motivera varför de svarat som de gjorde på testet.

Gibbs (2007) skriver att intervjuer kan generera djupa svar. I denna studie fick eleverna möjlighet att förklara hur de tänkt och fördjupa sina svar, vilket visade på vilken förståelse för likhetstecknet som de har. Kvalitativa metoder är flexibla eftersom de kan anpassas efter situation och utifrån hur undersökningen artar sig. När inte bara handlingar ska analyseras, utan även människors förståelse för dessa är kvalitativa metoder att föredra (Eliasson, 2013). Därför har kvalitativa metoder använts, då datainsamlingen i denna studie innefattar både observationer och intervjuer.

4.2 Validitet och reliabilitet

Om en undersökning är pålitlig och går att upprepa och då få samma resultat, är den reliabel (Eliasson, 2013). För att denna studie ska vara av hög reliabilitet har det tydligt beskrivits hur data har samlats in, vilka förutsättningar som funnits samt hur data har bearbetats. Detta för

att någon annan ska ha möjlighet att genomföra en liknande studie och då få liknande resultat, eller resultat som visar brister i slutsatserna i denna studie. Vid intervjuerna gavs deltagarna samma förutsättningar, då intervjuerna utgick från samma frågor (bilaga 3) samt diskussioner ifrån testet som alla deltagarna hade gjort. Även vid testet gavs eleverna samma förutsättningar, då alla elever gjorde samma test. Validitet handlar om undersökningen mäter det som undersökningen avses mäta, skriver Eliasson (2013). För att denna studie ska vara av hög validitet är både syftet och frågeställningarna tydligt preciserade och komprimerade. Detta för att inga misstolkningar av det som ska undersökas ska uppstå. Förutom detta så är utformningen av testet genomtänkt, då testet är utformat från tidigare utformade tester såsom Skolverkets test om taluppfattning (Skolverket, 2018b) samt att testet utgått från tidigare forskning om elevers förståelse för likhetstecknet. Observationerna utgår från observationsprotokollet (bilaga 4) samt att alla intervjuer utgick från samma intervjufrågor (bilaga 3).

4.3 Observationer

Som en del i fallstudien, genomfördes observationer där syftet var att besvara frågeställningarna 1 och 2: *Hur undervisar lärare i årskurs 1–3 om likhetstecknet?* samt *Vilken förståelse har elever för likhetstecknet och dess innebörd?* Observationer innebär att en observatör gör iakttagelser i en miljö och antecknar dessa på något sätt (Eliasson, 2013). Punch och Oancea (2014) skriver att det under observationens gång är bra att anteckna iakttagelser, med hjälp av till exempel ett formulär eller en tabell. Utan anteckningar kan delar av iakttagelserna lätt glömmas bort. Filma kan också vara bra, men då krävs vårdnadshavares tillstånd om de som ska observeras är minderåriga. Vid observationerna i denna studie dokumenterades iakttagelserna med hjälp av ett observationsschema (bilaga 4), som konstruerades efter frågeställningarna. Detta för att bland annat undersöka hur läraren benämner och förklarar likhetstecknets innebörd, vilken förståelse eleverna visar för likhetstecknets innebörd och hur de gör det samt hur läraren undervisar om likhetstecknet och hur eleverna får arbeta med likhetstecknet. Dessa iakttagelser dokumenterades med hjälp av observationsschemat. Observationerna filmades inte, då det som sagt kräver ett godkännande från vårdnadshavare.

4.3.1 Urval

Det är mina egna kontakter som ligger till grund för vilken lärare som observerades i denna studie, vilket Eliasson (2013) beskriver som ett bekvämlighetsurval. För att undersökningen skulle bli så bra som möjligt, har några urvalskriterier använts. Dessa kriterier var bland annat: läraren ska undervisa och vara behörig att undervisa i matematik samt att läraren ska arbeta i årskurs 1–3.

4.3.2 Genomförande av observationer

Observationerna genomfördes i en årskurs 3 på en kommunal skola. Observationerna genomfördes vid tre tillfällen under en och samma vecka. Det fanns inga specifika kriterier för vilka lektioner som skulle observeras, utan läraren visste sedan innan att studien avsåg att undersöka elevers förståelse för likhetstecknet samt hur lärare undervisar om och arbetar med likhetstecknet i klassrummet. Läraren bjöd in till tre tillfällen som läraren avsåg att undervisa om och arbeta med likhetstecknet. Observationerna startade cirka 10 minuter före lektionsstart för att observera hur läraren startade upp matematiklektionen. Observationerna avslutades cirka 5 minuter efter att matematiklektionen avslutats för att observera hur läraren avslutade matematiklektionen. En matematiklektion var 20 minuter och de två andra var 40 minuter vardera.

Fokus vid observationerna var att observera hur läraren arbetade med likhetstecknet, hur läraren benämner och förklarar likhetstecknet och dess betydelse samt vilken förståelse elever visade att de hade för likhetstecknet och hur de visade detta. Under observationstillfället placerade jag mig ensam längst bak i klassrummet, med eleverna framför mig. Ett observationsschema (bilaga 4) med olika rutor med frågor i fylldes i för att underlätta skrivandet. Med hjälp av observationsschemat studerades också hur delaktiga eleverna fick vara i undervisningen, hur lektionen var strukturerad, hur eleverna verkade uppleva lektionen samt vilka uppgifter och exempel läraren visade och förklarade.

Observationerna genomfördes före testet och intervjuerna med eleverna för att få en uppfattning om hur läraren arbetade med likhetstecknet och dess innebörd med eleverna.

4.3.3 Metoddiskussion

Eliasson (2013) beskriver att det finns olika typer av observatörer. En av dessa är en deltagande observatör, vilket var den observationsmetod som användes vid observationerna i denna studie. En deltagande observatör fokuserar på att iaktta och dokumentera iakttagelserna och förhåller sig passivt till omgivningen.

Eftersom att läraren höll i lektionerna kunde observationerna genomföras genom iakttagelser och ett passivt förhållningssätt. Helhetsbilden av observationerna hade förmodligen sett annorlunda ut om en annan observationsmetod använts, då observatören varit mer aktiv i sammanhanget. Fokus hade då varit på andra saker, vilket hade påverkat observationernas resultat.

Att använda ett observationsschema underlättade, då alla observationer utgick från samma förutsättningar samt att alla frågor besvarades vid samtliga observationer, vilket gjorde att fokus låg på att observera samma saker vid samtliga observationer.

4.4 Intervjuer

Förutom observationer, genomfördes även intervjuer. Syftet med intervjuerna var att besvara frågeställning 2: *Vilken förståelse har elever för likhetstecknet och dess innebörd?* Intervjuerna kan ses som ett komplement till testet, där eleverna vid intervjutillfället fick chansen att fördjupa och motivera sina svar. Förutom detta, så var förhoppningen att se hur väl observationerna stämde överens med elevernas syn på hur de arbetar med likhetstecknets innebörd.

Punsch och Oancea (2014) menar att intervjuer är ett bra sätt för att förstå andra, om rätt typ av frågor ställs. En intervju ger möjligheten att utforska hur andra människor ser på olika situationer, hur de tänker samt uppfattar saker och ting. I denna studie genomfördes semistrukturerade intervjuer. Eliasson (2013) skriver att det innebär att intervjuaren utgår från ett antal frågor, men kan med hjälp av följdfrågor som inte finns nedskrivna från början gå ner mer på djupet.

4.4.1 Urval

De elever som deltog i studien gick i klassen som observerades. I klassen går 18 elever. Eleverna valdes utifrån ett bekvämlighetsurval. För att studien skulle bli så bra som möjligt

har några urvalskriterier använts. Dessa urvalskriterier var: eleverna ska gå i den klass som läraren som observerades undervisar matematik i, eleverna ska ha varit närvarande vid alla tre observationstillfällen och eleverna ska ha gjort testet. Utifrån de svar eleverna gav på testet, valdes elever som uppfyllt urvalskriterierna ut. I de tre grupperna blandades elever som haft många eller alla rätt på testet med elever som hade fler fel än fyra. Grupperna var alltså inte homogena.

4.4.2 Genomförande av intervjuer

Den undervisande läraren i klassen delade ut missivbrevet (bilaga 1) till alla elever i klassen i god tid före intervjutillfället. Alla elever ville och fick delta i studien för sina vårdnadshavare. Efter att de tre observationerna genomförts, gjorde eleverna ett test som analyserades. Som nämnt i avsnittet "urval" här ovan, så valdes nio elever ut utifrån de svar de gav på testet och delades in i olika intervjugrupper. Intervjuerna genomfördes i grupp, där tre elever åt gången intervjuades. Enligt Eliasson (2013) visar gruppintervjuer hur människor resonerar i grupp, vilket är i linje med den teoretiska utgångspunkten för detta arbete, den sociokulturella lärandeteorin.

Intervjuerna med eleverna genomfördes i ett intilliggande grupprum, ansikte mot ansikte, för att undvika missförstånd och för att följdfrågor på ett enklare sätt skulle kunna ställas. Intervjuerna som genomfördes var semistrukturerade som utgick från ett antal frågor (se bilaga 3). Eleverna fick möjlighet att utveckla sina svar på ett djupare plan och följdfrågor kunde på ett lättsamt sätt ställas, vilket Punsch och Oancea (2014) skriver är typiskt för semistrukturerade intervjuer. Alla intervjuer spelades in och transkriberades därefter. Intervjuerna tog mellan 16–20 minuter per grupp och efter att den första elevgruppen intervjuats, intervjuades den andra elevgruppen och så vidare.

4.4.3 Metoddiskussion

Eleverna intervjuades i grupp. Enskilda intervjuer hade också varit intressant för att fördjupa sig mer i varje elevs resonemang, tankar och svar, men eftersom att eleverna är väldigt unga och inte vana vid intervjuer valdes därför gruppintervjuer. En annan anledning varför gruppintervjuer valdes var för att eleverna skulle kunna hjälpa varandra att resonera samt att de skulle känna sig tryggare i intervjusituationen. Punsch och Oancea (2014) menar att

deltagarna i en gruppintervju kan resonera med varandra samt att flera olika perspektiv för varje fråga lyfts. Det gör också att deltagarnas kunskaper syns i samspelet mellan varandra, vilket är starkt kopplat till den sociokulturella lärandeteorin (Säljö, 2012). Vid en gruppintervju agerar personen som intervjuar mer som en moderator för att styra deltagarna så att de håller sig ämnet och inte svävar iväg.

4.5 Forskningsetiska principer

I min studie har deltagarna själva godkänt deras deltagande samt vårdnadshavare för minderåriga och de har när som helst kunnat avbryta sitt deltagande. Syftet med studien har framgått tydligt innan deltagarna godkänt deras deltagande och både jag och deltagarna har bemött varandra med respekt.

Vetenskapsrådets (2002) huvudkrav på forskning har legat till grund för denna studie.

Dessa fyra krav är:

Informationskravet: Studiens syfte ska tydligt framgå till deltagarna (Vetenskapsrådet, 2002). Innan deltagarna godkände sitt deltagande informerades de på ett tydligt sätt om studiens syfte.

Samtyckeskravet: Deltagarna bestämmer själva över sin medverkan i studien (Vetenskapsrådet, 2002). Eftersom eleverna som deltog i studien är minderåriga, behövde både elever och vårdnadshavare skriftligt godkänna att eleven deltog i studien. Både elever och läraren har själva fått godkänna sitt medverkande i studien och har närsomhelst kunnat avbryta sitt deltagande om de velat.

Konfidentialitetskravet: Uppgifter om deltagarna i studien ska förvaras på ett sådant sätt att inga obehöriga kan ta del av dem (Vetenskapsrådet, 2002). Alla deltagare i studien har anonymiserats och inspelningarna från intervjuerna har tagits bort efter transkription.

Nyttjandekravet: De uppgifter som samlas in för studien, ska enbart användas för forskningsändamål (Vetenskapsrådet, 2002). Detta framkom tydligt i brevet som både

vårdnadshavare och elever skulle skriva på ifall de godkände sitt deltagande i studien (bilaga 1). Det förtydligades också vid intervjuernas start. För läraren förklarades detta muntligt.

4.6 Bearbetning av data

Begreppen operationell och relationell har legat till grund för bearbetningen av data i denna studie, vilket innebär att metodologin för bearbetningen är ett begreppsramverk. Det innebär att den data som inkommit har kategoriserats och analyserats utefter begreppen, då de är centrala i studien. Som tidigare nämnt betyder operationell att likhetstecknet tolkas som "det blir" där svaret följs efter likhetstecknet eller som en signal på att något ska genomföras, medan relationell innebär att det vänstra och det högra ledet om likhetstecknet alltid är lika mycket (Stephens et.al, 2013).

Som tidigare nämnt menade Vygotskij att språket är grunden för kunskaps-och språkutvecklingen hos människor, då det är genom det skriftliga och talande språket som vi kommunicerar med andra människor samt blir tänkande varelser (Säljö, 2012). Löwing (2006) menar att det är viktigt att elever lär sig att förstå och kommunicera på matematiskt språk, då språket inom matematiken är väldigt viktigt. Därför är det i denna studie högst relevant hur lärare förklarar och definierar likhetstecknet och dess innebörd för eleverna samt hur elevernas uppfattning och förståelse av likhetstecknet faktiskt är. Data som samlas in kommer att kategoriseras utifrån om det visar på en operationell eller en relationell syn på likhetstecknet. Sterner (2012) skriver att om en elev svarar att svaret på uppgiften $8 + 4 = _ + 5$ blir 12 eller 17 tyder det på att eleven har en operationell förståelse av likhetstecknet. Eleven ser likhetstecknet som något som ska utföras och räknar därför ihop termerna alternativt bortser från att det står $+ 5$ i det högra ledet. Elever med en relationell förståelse för likhetstecknet kan enligt Grønmo (2011) korrekt ange talet på den tomma linjen till exempel $_ + 23 = 30 - 6$, då dessa elever kan reflektera över vad varje led är värd och förstå att varje led ska vara lika mycket värd. De elever som i motiveringsfrågan på testet till exempel har svarat att de satte ut likhetstecknet för att de vet att det ska vara där eller för att de vet om det är rätt eller fel går inte att avgöra om de har en operationell eller en relationell förståelse för likhetstecknet. Elever som beskriver likhetstecknet som "det blir" har en operationell förståelse för likhetstecknet. De elever som har svarat att det ska vara lika mycket på båda sidor visar på att de har relationell förståelse för likhetstecknet.

5 Resultat

I den första delen presenteras det resultat som framkommit genom observationerna (frågeställning 1 och 2) följt av den andra delen där resultatet från testet redovisas. I den delen presenteras även hur eleverna under intervjuerna resonerade om deras svar på olika uppgifter i testet samt vilken förståelse för likhetstecknet de har. I den tredje delen redogörs för intervjuerna med eleverna (frågeställning 2) och i den fjärde och avslutande delen görs en övergripande sammanfattning utifrån forskningsfrågorna och syftet.

5.1 Resultatet från observationerna

En lärare som undervisar i matematik på en kommunal skola i en årskurs 3 observerades vid tre tillfällen. I klassen går det 18 elever. Läraren benämns i arbetet som Asta. Resultat kommer att presenteras från observationstillfälle 1, 2 och 3 och kommer i arbetet att benämnas som så.

5.1.1 Lärarens undervisning och lektionernas upplägg

Vid det första observationstillfället startade Asta lektionen med att ta fram en bild på SMARTboarden där likhetstecknets symbol visades. Asta frågade eleverna vad tecknet betydde. En elev svarade att det betydde lika med, en annan att det betydde att det skulle vara lika mycket på båda sidor och en tredje gav ett exempel att om det stod $3 + 1$ på ena sidan måste det vara lika mycket på den andra sidan av likhetstecknet. Asta förklarade sedan att tecknet betyder lika med och att det ska vara lika mycket på bägge sidor. Asta skrev $12 + \underline{\quad}$ på den vänstra sidan av likhetstecknet och skrev 13 på den högra sidan av likhetstecknet. "Vad ska det stå på den tomma linjen till vänster om lika med tecknet?" En elev svarade att det skulle stå 1. Asta nickade. "Men om jag skriver dit $+ 4$ på den högra sidan, så att det står $13 + 4$, vad ska det stå då på den tomma linjen?" En elev viftade häftigt med handen och svarade att det borde stå 1 när eleven fick svara. "Hm... $12 + 1$, vad blir det?" frågade Asta. Eleven svarade 13. "Är 13 samma sak som $13 + 4$?" Eleven skrattade och skakade på huvudet. "Det ska stå 5 menar jag ju" sa eleven och Asta skrev 5 på den tomma linjen. Det här kan tolkas som att eleven har en operationell förståelse för likhetstecknet, då eleven såg likhetstecknet som en signal att göra något och tyckte därför att det skulle stå 13 på den tomma linjen. Däremot uppmanar Asta till den relationella förståelsen av likhetstecknet, då Asta jämför höger-och

vänsterledet med varandra. Efter att Asta visade hur uppgiften kan lösas förstod eleven att 13 inte är lika mycket värt som 17, därav kan det inte stå 13 på den tomma linjen. Det kan tolkas som att det är en sociokulturell syn på lärandet, då kunskap tillägnas genom interaktion och samtal samt att Asta stöttar eleven mot en lösning till uppgiften genom att ställa lämpliga frågor.

Eleverna fick därefter arbeta i stationer, där det var tio elever i en grupp och åtta elever i en grupp. Den ena gruppen fick spela matematikspel på iPads medan den andra gruppen samlades på golvet framme vid SMARTboarden. Eleverna fick arbeta två och två och lösa olika uppgifter tillsammans på en liten whiteboardtavla. Den första uppgiften hette "sant eller falskt". På SMARTboarden visades sex olika beräkningar. Eleverna skulle därefter se om det var sant eller falskt att båda sidor om likhetstecknet var lika mycket. Ett exempel på en uppgift var $6 + 9 = 12 + 1$. Ett par resonerade såhär: "Sex plus nio är femton. Tolv plus ett... är inte femton. Då är det falskt, för femton är inte lika mycket som tolv". Ett annat exempel på en uppgift var $13 - 9 = 6$. Ett annat par resonerade såhär: "Tretton minus nio... Jag räknar från nio. Det blir fyra och det är inte lika med sex". Det kan tolkas som att dessa två par har en relationell förståelse för likhetstecknet, då båda paren utgår ifrån att det ska vara lika mycket i varje led.

Efter sant eller falskt uppgiften skulle eleverna sätta ut ett likhetstecken eller ett skilt från tecken så att beräkningen stämde. Ett exempel på en uppgift de skulle lösa var $2 + 7 \underline{\quad} 9 + 0$. Ett par resonerade såhär: "Vi tänkte att två plus sju är nio och nio plus noll är också nio. Det är alltså lika mycket. Så då satte vi ut ett lika med tecken". En annan uppgift var $2 \times 5 \underline{\quad} 10 \times 0$ som ett flertal av paren hade problem med. Ett par resonerade såhär: "Två gånger fem är tio, det vet vi. Tio gånger noll är tio så då stämmer det. Det är lika mycket på båda sidor. Eller vänta, är det? Vänta... tio gånger noll... Men åh, det är ju noll för noll gånger någonting är ju noll. Det stämmer ju inte alls det. Det ska vara ett inte lika med, för nu är det ju tio på en sida och noll på den andra sidan". Eleverna benämnde alltså "skilt från" tecknet som "inte lika med", vilket förmodligen är den benämningen som Asta använder för tecknet. Efter att den ena gruppen gjort båda dessa uppgifter, byttes grupperna av. Det kan tolkas som att eleverna genom samspel med varandra utvecklar sina matematiska kunskaper, då eleverna lär av och med varandra vilket är centralt inom den sociokulturella lärandeteorin.

Vid det andra observationstillfället tog Asta fram en bild på SMARTboarden där det var en bild på en detektiv och ett likhetstecken. "Nu vill jag att ni ska vara som detektiver. Det behöver man vara när man arbetar med lika med tecknet. Listar ni ut hur mycket det är på en sida, vet ni ju hur mycket det ska vara på den andra. Eller hur? För lika med tecknet betyder ju att det ska vara lika mycket på båda sidor" sa Asta. Asta använder benämningen "lika med" istället för att benämna likhetstecknet vid dess rätta namn. Eleverna får genom Aastas benämning lära sig att likhetstecknet heter "lika med", vilket inte är en garanti för att det förstår likhetstecknets egentliga betydelse. I detta fall kan det tolkas som att Asta undervisar på ett sätt som gynnar eleverns relationella förståelse för likhetstecknet, då de får lära sig att det ska vara lika mycket i varje led om likhetstecknet. Efter att Asta pratat om bilden på SMARTboarden, delades eleverna in två och två, och fick varsin liten whiteboardtavla. Asta bläddrade bild på SMARTboarden och en ny bild där det stod "Vilket tal saknas?" framträdde. Under rubriken fanns också åtta uppgifter. Eleverna skulle skriva av dessa uppgifter på tavlan och därefter lösa dem parvis. Asta gick runt och lyssnade när eleverna resonerade och stöttade de par som behövde lite extra hjälp. Efter ungefär sju minuter plingade Asta i en klocka och eleverna tystnade och riktade blickarna mot tavlan. Asta frågade ett av paren vad de trodde om den första uppgiften som var $9 - \underline{\quad} = 2$. "Nio minus någonting är lika med två står det. Då tänkte vi att två plus någonting ska bli nio och det är sju. Då testade vi och nio minus sju är två" svarade det paret. Ett annat par förklarade uppgiften $\underline{\quad} - 2 = \underline{\quad} + 9$. De förklarade såhär: "Vi tänkte att elva minus två blir nio... och då blir det noll plus nio på andra sidan, för det är ju lika mycket. Noll plus nio är ju nio". Ett annat par förklarade samma uppgift på följande sätt: "Vi tänkte att tjugo minus två är arton och då måste det vara arton på andra sidan. Nio plus nio är arton och då är det lika mycket på båda sidor". Det kan tolkas som att båda paren har en relationell förståelse för likhetstecknet, då båda paren använder det relationella synsättet för att betrakta relationen mellan höger-och vänsterled. Det andra paret beskriver dessutom att det ska vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet. Ett par hade svårt med luckuppgifterna, då de inte förstod att det skulle vara lika mycket på båda sidor. De hade svårt att resonera fram ett svar och svårt att förstå hur uppgifterna var konstruerade. En av eleverna blev märkbart frustrerad när hen inte förstod vad som skulle stå på den tomma linjen. På uppgiften $9 + 3 = \underline{\quad} + 3$ hade de tänkt såhär: "Nio plus tre är tolv, så då blir det tolv som ska stå på linjen". De reflekterade inte över att det redan stod en tre där, utan de tänkte

att de skulle skriva svaret på den tomma linjen. Detta kan tolkas som att de har en operationell förståelse för likhetstecknet.

Vid det tredje och sista observationstillfället tog Asta fram samma bild som hon visade vid föregående observationstillfälle, bilden med likhetstecknet och detektiven. Därefter frågade hon: "Kommer ni ihåg vad jag berättade om detektiven och lika med tecknet?" Att Asta benämner likhetstecknet som lika med tecknet kan tolkas som en relationell benämning av likhetstecknet, då en operationell benämning brukar vara "det blir" eller "det är". En elev svarade Asta att de måste vara detektiver och först räkna ut hur mycket det är på den ena sidan och sedan räkna ut hur mycket det är på den andra. En annan elev förklarade att lika med tecknet betyder att det ska vara lika mycket på båda sidor. Eleverna delades sedan in i par igen och fick ett A3 papper framför sig, där hälften av papperet var grönt och den andra halvan röd. Den gröna halvan representerade sant och den röda halvan representerade falskt. De fick två papper per par med olika beräkningar som de fick klippa isär. Därefter skulle varje par lägga ut beräkningarna på antingen falskt om beräkningen inte stämde eller på sant om beräkningen stämde. Eleverna hade ungefär 7 minuter på sig, därefter plingade Asta i klockan igen. Asta drog en sticka med ett av elevernas namn och frågade denne elev och elevens partner om en av beräkningarna. "Var har ni placerat $20 + 7 = 17 + 9$?" frågade Asta. Paret förklarade att de hade börjat med att räkna ut att $20 + 7$ var 27 och att $17 + 9$ var 25. Därför la de denna beräkning på falsksidan. Asta drog en ny sticka med ett nytt namn och denne elev med sin partner förklarade nästa beräkning, $7 + 23 = 30 - 6$. "Sju plus tjugotre är trettio... Trettio minus sex är ju mindre är trettio, det är ju faktiskt... Tjugofyra, så det stämmer inte. Det är falskt". Efter att Asta och eleverna resonerat om alla påståenden fick eleverna arbeta med ett arbetsblad om likhetstecknet, där det var både luckuppgifter där eleverna skulle skriva rätt tal på linjen samt uppgifter där de skulle sätta likhetstecknet eller olikhetstecknet i en ruta mellan två beräkningar.

5.1.2 Elevernas delaktighet och förståelse

Vid alla observationstillfällen var eleverna väldigt delaktiga. De fick arbeta parvis där de tillsammans med sin kompis fick resonera och diskutera om olika uppgifter samt att de sedan gick igenom varje uppgift tillsammans, där vissa elever fick en chans att förklara hur de tänkt och varför de tänkte så. Asta var noga med att alla elever fick en chans att komma till tals och

gick runt till paren när de resonerade och klurade. Vissa par fick Asta stötta lite extra, till exempel blev ett par osams om vem som skulle skriva på whiteboardtavlan. Då fick Asta kliva in och säga att de fick ta varannan uppgift. Asta utgick från elevernas förkunskaper, då detta verkar vara ett område som är återkommande i Astas klass.

Eleverna verkade tycka att det var roligt att arbeta med likhetstecknet. De pratade mycket med varandra, förklarade för varandra hur de tänkte och de verkade motiverade till att lösa uppgifterna. Alla par ville gärna komma till tals och lät också varandra komma till tals. Grupperna samarbetade väl och Asta blev som sagt in och stöttade de grupper som behövde lite extra hjälp. Den sociokulturella lärandeteorin var tydligt framträdande, då eleverna fick vara delaktiga, samarbeta, lyssna och lära av varandra. Eleverna fick också bra stöd av läraren som ställde frågor som hjälpte eleverna vidare i sitt lärande. Eleverna fick inte rätt svar med en gång, utan fick resonera sig fram till det med hjälp av lämpliga frågor och uppmaningar.

Eleverna kunde förklara innebörden av likhetstecknet och skilt från tecknet, vad skillnaden mellan tecknen är och när respektive tecken ska användas. Majoriteten av eleverna förstod att det ska vara lika mycket på båda sidor, det var bara några enstaka elever som uppvisade svårigheter kring likhetstecknets betydelse vid luckuppgifterna. En elev förklarade likhetstecknet såhär när Asta frågade om likhetstecknets betydelse: "Det ska vara lika mycket på bägge sidor för att man ska få sätta ut lika med tecknet. Lika med tecknet kan vara i mitten... eller inte i mitten. Det kan vara lite längre bak eller längre fram också faktiskt". Det kan tolkas som att majoriteten av eleverna i Astas klass har en relationell förståelse för likhetstecknet, medan ett fåtal eleverna har en mer operationell förståelse.

5.2 Resultatet från testet

Sjutton elever gjorde testet, en av eleverna var vid testtillfället sjuk. Alla elever gjorde sättet vid samma tidpunkt och efter att eleverna gjort testet, samlades testen in och analyserades. Nio elever som gjorde testet intervjuades därefter i grupper om tre. Resultat från både testtillfället och intervjutillfället där eleverna fick möjlighet att förklara hur de tänkt presenteras i detta avsnitt.

5.2.1 Elevernas svar på testen

Testet bestod av totalt 19 frågor, varav en fråga krävde att de skriftligen skulle förklara hur de tänkt när de valde att sätta ut likhetstecknet på de ställen de gjorde. På den första delen av testet skulle eleverna fylla i de tal som saknades. Den delen bestod av tolv uppgifter. Totalt fanns det 16 felaktiga svar av totalt 323 svar. En av uppgifterna som en elev svarade fel på var uppgiften $8 + 4 = \underline{\quad} + 5$. Eleven svarade att det skulle stå tolv på den tomma linjen. Det kan tolkas som att eleven har en operationell förståelse för likhetstecknet, då eleven inte har förståelse för att båda leden om likhetstecknet ska vara värda lika mycket. De sexton övriga elever som svarade att det ska stå sju på den tomma linjen, visade på en relationell förståelse för likhetstecknet då de förstår att det ska vara lika mycket på respektive sida av likhetstecknet. På frågan $20 = \underline{\quad} + 5$ svarade tre elever att det skulle stå tjugofem på den tomma linjen. Det kan tolkas som att de har en operationell förståelse för likhetstecknet, då eleverna är så vana att svaret på beräkningen ska stå på höger sida av likhetstecknet att de räknade ihop $20 + 5$. Det kan tolkas som att elever som skrev femton på den tomma linjen har en relationell förståelse för likhetstecknet, då de förstått att det ska vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet. På uppgiften $27 = \underline{\quad} - 2$ svarade tre elever att det skulle stå tjugofem på den tomma linjen. Eleverna räknade $27 - 2$ och skrev därför tjugofem på linjen. Även dessa elever har en operationell förståelse för likhetstecknet, då de tänkte att svaret av beräkningen ska stå till höger och att likhetstecknet signalerar att något ska genomföras. Elever som svarat tjugonio på den tomma linjen visar att de har en relationell förståelse för likhetstecknet, då de förstår att $29 - 2$ är lika mycket som 27. Det är då lika mycket i respektive led om likhetstecknet.

På den andra delen av testet skulle eleverna sätta ut likhetstecknet på de linjer där det stämde. Den delen bestod av sex uppgifter och totalt fanns det tre felaktiga svar. På uppgiften $33 - 5 \underline{\quad} 28 + 5$ satte en elev ut likhetstecknet. Det kan tolkas som att eleven har en operationell förståelse för likhetstecknet, då eleven uppfattade att 28 var det korrekta svaret och räknade därför inte $+ 5$. De övriga eleverna som inte satte ut likhetstecknet uppfattade att $33 - 5$ inte är lika mycket som $28 + 5$.

På den tredje och sista delen skulle eleverna förklara varför de valde att sätta ut likhetstecknet på de ställen som de gjorde. Tretton elever svarade att det är lika mycket på varje sida eller för att det var lika mycket. Det kan tolkas som att dessa elever har en relationell förståelse för likhetstecknet, då eleverna förstår att det ska vara lika mycket i respektive led

för att ett likhetstecken kan användas. En elev svarade att hen satte ut dom för att hen visste att dom ska vara där och en annan elev skrev att hen vet om det är rätt eller fel. Det är svårt att avgöra vilken förståelse för likhetstecknet dessa elever har, eftersom de ännu inte "lärt sig" hur de ska kommunicera sin motivering. Därav kan ingen tolkning av elevernas förståelse för likhetstecknet göras. Totalt så visade elva elever att de har en relationell förståelse för likhetstecknet medan sex elever visade att de har både en relationell- och en operationell förståelse för likhetstecknet. Eftersom ingen av de elever som deltog i testet hade svarat fel på alla uppgifter, visar det att det inte är någon elev som bara har en operationell förståelse.

5.2.2 Elevernas resonemang om deras svar

Vid intervjutillfällena intervjuades både elever som svarat fel på någon eller några frågor samt elever som svarat rätt på alla frågor. Eleverna fick möjlighet att förklara hur de tänkt både när de svarat rätt och fel.

På uppgiften $18 + \underline{\quad} = 24 + 4$ sa en elev: "Aah, där svarade jag fel ser jag nu. Jag skrev att det skulle vara sex men det är ju fel. Jag tänkte att arton plus sex är tjugofyra, jag missade den där plus fyra. Men hade jag inte missat hade jag skrivit tio för tjugofyra plus fyra är ju tjuugoåttio och arton plus tio är tjuugoåttio". Den eleven visade vid testtillfället en operationell förståelse för likhetstecknet, då hen bortsåg att det stod $+ 4$ till höger om 24. När eleven vid intervjutillfället fick möjlighet att resonera kring sitt svar märkte eleven att hen svarat fel och kunde då resonera hur hen skulle ha gjort istället.

På uppgiften $\underline{\quad} + 23 = 30 - 6$ beskrev en elev hur hen hade tänkt såhär: "Ja men jag räknade sen trettio minus sex och det är tjugofyra och då visste jag att det skulle vara tjugofyra på andra sidan också. Då skrev jag ett, för ett plus tjugotre är tjugofyra". Det kan tolkas som att eleven har en relationell förståelse för likhetstecknet, då eleven börjar med att räkna ut vad $30 - 6$ är och kommer då fram till att det även ska vara 24 på andra sidan av likhetstecknet. En annan elev förklarade såhär: "Åh... Jag skrev sju... Jaha... Jag tänkte sju plus tjugotre, att det är trettio. Sedan... Missade jag nog att det stod minus sex". Frågan är om eleven missade att det faktiskt stod minus sex eller om elevens förståelse för likhetstecknet är operationellt, då eleven tänkt att svaret på beräkningen ska stå till höger om likhetstecknet.

På uppgiften $33 - 5 \underline{\quad} 28 + 5$ beskrev en elev hur hen tänkt såhär: "Jag räknade att trettio minus fem är tjuugoåttio och det är inte lika mycket som tjuugoåttio plus fem, för det är

ju trettio-tre. Det är inte lika mycket. Därför satte jag ut inte lika med tecknet". Det kan tolkas som att eleven har en relationell förståelse för likhetstecknet, då eleven tänkte att det måste vara lika mycket i båda led för att ett likhetstecken ska kunna användas. En annan elev beskrev hur hen tänkt såhär: " "Jag såg inte plus fem... Eller jag tänkte inte på... den... Jag tänkte att trettio-tre minus fem är ju tjugoåtta och att det var lika mycket då som tjugoåtta men jag såg kanske inte femman eller tänkte i alla fall inte på den". Eleven beskrev att hen inte tänkte på att femman var där, utan räknade att $33 - 5 = 28$. Det kan tolkas som att denna elevs förståelse för likhetstecknet är operationellt, då eleven såg likhetstecknet som en signal på att en beräkning ska utföras och att svaret ska stå på höger sida av tecknet.

Det var ett flertal elever som vid testtillfället svarat fel på en fråga men som vid intervju-tillfället kom på rätt svar när de fick lite stöttning. Genom att dessa elever fick stöttning utvecklades deras kunskaper om likhetstecknet.

5.3 Resultatet från intervjuerna

Nio elever från Astas klass intervjuades där eleverna intervjuades i grupper om tre. Eleverna i varje grupp visade varierade kunskaper från testet och alla fick möjligheten att komma till tals under intervjun. Den första gruppen som intervjuades kommer benämnas "Elevgrupp 1", den andra gruppen som intervjuades benämns "Elevgrupp 2" samt den sista gruppen som intervjuades benämns som "Elevgrupp 3".

5.3.1 Elevernas förståelse för likhetstecknet

Både Elevgrupp 1 och Elevgrupp 2 benämnde likhetstecknet som "lika med" och att det betydde att det ska vara lika mycket på båda sidor av tecknet. Elevgrupp 2 tyckte dock att i början när de fick lära sig om likhetstecknet och dess betydelse var det svårt att veta vad det egentligen betydde.

"Jag tror att det var i ettan som vi fick lära oss om lika med tecknet... Men man visste ju inte riktigt att det betydde att det skulle vara lika mycket på båda sidor. Det var mer i tvåan när vi började att arbeta med inte lika med som man förstod att det skulle vara lika mycket på båda sidor. Innan det så trodde man att lika med betydde svaret, att efter lika med kom svaret" (Elevgrupp 2, 2019).

Elevgrupp 3 jämförde likhetstecknet med en våg. När det inte är lika mycket tyngd på båda sidor så är det inte lika mycket och då kan inte heller likhetstecknet användas.

”När det inte är lika mycket på båda sidor är det inte jämvikt... lika med är som... typ en våg liksom. Det ska väga lika mycket och väger det lika mycket, då är det lika mycket på båda sidor och det ska det vara” (Elevgrupp 3, 2019).

Resultaten ovan kan tolkas som att Elevgrupp 2 i början av sin grundskoletid hade en operationell förståelse för likhetstecknet, då de tolkade det som att svaret följde efter likhetstecknet. Den elevgruppen menade på att det inte var förrän i årskurs 2 som de förstod att det skulle vara lika mycket på båda sidor. Att Elevgrupp 3 jämför likhetstecknet med en våg, och att Elevgrupp 1 och Elevgrupp 2 benämner tecknet som ”lika med” och att det ska vara lika mycket på båda sidor, kan tolkas som att de har en relationell förståelse för likhetstecknet.

Elevgrupp 1, Elevgrupp 2 och Elevgrupp 3 beskrev ”inte lika med”-tecknet som ett motsatstecken till likhetstecknet. Gruppernas definition av ”inte lika med”-tecknet var att det inte var lika mycket på båda sidor.

”Men som... fem plus fyra är ju inte lika med tio. Då kan inte lika med tecknet användas. Står det... typ... sju plus tio lika med sjutton då kan man använda lika med... för då är det ju lika mycket på båda sidor” (Elevgrupp 1, 2019).

Elevgrupp 1 gav exempel på när likhetstecknet inte får användas och när skilt från tecknet kan användas istället. När det inte är lika mycket på båda sidor får inte likhetstecknet användas, men då kan skilt från tecknet användas istället.

Samtliga elevgrupper resonemang om skilt från tecknet kan tolkas som att de har en relationell förståelse för likhetstecknet, då eleverna förklarar att skilt från tecknet används när det inte är lika mycket på båda sidor medan likhetstecknet enbart får användas när det är lika mycket på båda sidor av tecknet.

5.3.2 Elevernas upplevelse av att arbeta med likhetstecknet

Elevgrupp 1 beskrev att de fick lära sig om likhetstecknet genom att de fått lyssna på deras lärare och prata mycket om likhetstecknet. De har fått arbeta med likhetstecknet i deras matematikbok och det kommer ofta uppgifter där de till exempel ska sätta ut likhetstecknet om beräkningen stämmer.

”Vi får ju jobba hela tiden med lika med... Det är ju hela tiden i boken, så man måste ju förstå det” (Elevgrupp 1).

Elevgrupp 2 och Elevgrupp 3 beskrev att deras lärare ofta brukar fråga eleverna vad likhetstecknet betyder, så att de får öva på att förklara och resonera om likhetstecknets betydelse. När läraren pratar om likhetstecknet brukar läraren säga lika med, sa alla tre elevgrupperna. När läraren sa ”lika med” förstod eleverna vad läraren menade, att det ska vara lika mycket på båda sidor av tecknet, vilket visar på en undervisning där eleverna tillägnar sig en relationell förståelse för likhetstecknet.

”Men jag tycker nog att det hade varit lättare att förstå lika med om vi hade fått lära oss inte lika med direkt... Då hade jag fattat att lika med inte betyder svaret, utan att det betyder att det ska vara lika mycket. Det var svårt att förstå i början” (Elevgrupp 3).

I årskurs 2 blev eleverna introducerade till skilt från tecknet och samtliga elevgruppers upplevelse var att det blev lättare att förstå vad likhetstecknet betydde då. Elevgrupp 3 menade dock att det hade blivit lättare att förstå vad likhetstecknet tecknet betydde från början, om både likhetstecknet och skilt från hade introducerats samtidigt.

Elevgrupp 2 beskriver att de har fått arbeta med klossar för att elevernas förståelse för att det ska vara lika mycket på vardera sida av likhetstecknet skulle utvecklas. De beskrev också att de bland annat har fått arbeta med påståenden som de ska klura ut är sanna eller falska, räkna ut vad svaret på olika beräkningar blir, skriva i likhetstecknet eller skilt från tecknet i rutor och skriva rätt tal i en ruta för att beräkningen ska stämma.

Elevgrupp 1 tyckte att det var lite svårt att arbeta med likhetstecknet och ganska roligt, men de tyckte att det är viktigt att förstå vad likhetstecknet betyder. Elevgrupp 2 upplevde att

det var roligt och lätt att arbeta med likhetstecknet, nu när de förstått tecknets betydelse. Däremot upplevde de att det kunde vara svårt vid beräkningar med högre tal, för då kunde de glömma bort att det ska vara lika mycket på båda sidor och tänka att beräkningen står till vänster och svaret till höger. Elevgrupp 3 tyckte att det var roligt och spännande att arbeta med likhetstecknet, speciellt när de får arbeta tillsammans i grupper och prata med varandra. De kände att de lär sig mycket när de får resonera tillsammans och höra hur andra tänker.

Det kan tolkas som att eleverna upplevde att de lär sig mycket av och i samspel med varandra, vilket är centralt i den sociokulturella lärandeteorin. En annan tolkning är att elevernas möjlighet att tillägna sig en relationell förståelse för likhetstecknet är stor, då läraren undervisar på ett sätt där eleverna får möjlighet att genom olika arbetssätt förstå att det ska vara lika mycket i respektive led för att ett likhetstecken får användas.

5.4 Sammanfattning av resultatet

Sammanfattningsvis visar resultatet att lärarens undervisning gynnar elevers relationella förståelse för likhetstecknet, då läraren förklarade likhetstecknet som att det ska vara lika mycket på båda sidor av tecknet. Eleverna har också genom olika arbetssätt och arbetsformer fått lära sig att det ska vara lika mycket i respektive led för att ett likhetstecken ska få användas. När det inte är lika mycket på båda sidor av likhetstecken kan ett skilt från tecken användas, ett tecken som benämndes som "inte lika med" av båda lärare och elever. Några elever upplevde att det blev lättare att förstå likhetstecknets betydelse när de fick lära sig om och kunde använda sig av skilt från tecknet. Eleverna fick vid observationstillfällena bland annat arbeta med luckuppgifter, sant eller falskt, lyssna på en kortfattad presentation av likhetstecknet samt arbeta självständigt. Eleverna fick vara delaktiga i undervisningen, samarbeta samt lyssna och diskutera med varandra vilket är centralt inom den sociokulturella lärandeteorin. Observationerna visade att både läraren och eleverna benämnde likhetstecknet som "lika med", vilket i sig inte garanterar en relationell förståelse. Eleverna kunde på egen hand förklara att det ska vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet. Testet och de uppföljande intervjuerna med nio elever visade att ett fåtal elever uppvisade en mer operationell än en relationell förståelse för likhetstecknet. Dessa elever såg likhetstecknet som en signal på att en beräkning ska utföras samt att svaret på beräkningen ska stå på höger sida av likhetstecknet, medan majoriteten av eleverna hade en relationell förståelse för

likhetstecknet. De eleverna beskrev att det skulle vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet för att likhetstecknet ska få användas.

6 Diskussion

I kapitel 6 diskuteras de resultat som redovisats i föregående kapitel och ställs mot relevant forskning, som presenterats i kapitel 2. Därefter diskuteras val av metod, tillförlitligheten i studien samt sammanfattas några slutsatser som kan dras utifrån denna studie. Avslutningsvis kommenteras arbetet och förslag på vidare forskning ges.

6.1 Resultatdiskussion

Syftet med denna studie var som tidigare nämnt i kapitel 3 att undersöka vilka möjligheter elever i årskurs 1–3 har för att utveckla en förståelse för likhetstecknet samt vilken förståelse för likhetstecknet elever i årskurs 1–3 visar att de faktiskt har. För att kunna uppfylla syftet utgick studien från följande frågeställningar:

- Hur undervisar lärare i årskurs 1–3 om likhetstecknet?
- Vilken förståelse har elever i årskurs 1–3 för likhetstecknet och dess innebörd?

Syftet med studien har uppfyllts, genom att det tydligt framkommit hur läraren utformar undervisningen samt benämner och förklarar likhetstecknet för att främja den relationella förståelsen av likhetstecknet. Det har även framkommit vilken förståelse för likhetstecknet elever i årskurs 1–3 faktiskt har samt vilka möjligheter elever i årskurs 1–3 har för att utveckla en förståelse för likhetstecknet.

6.1.1 Lärarens undervisning och elevers förståelse

Asta benämnde likhetstecknet som "lika med", vilket även eleverna gjorde. Både Asta och eleverna förklarade likhetstecknet som att det ska vara lika mycket på varje sida av likhetstecknet. Löwing och Kilborn (2013) menar att det är viktigt att tänka på språket och vilka formuleringar som används i undervisningen. Det är inte heller bra att begrepp eller symboler får informella namn. Lika med är ett informellt namn av likhetstecknet, men som fortfarande har samma betydelse och är snarlikt till det formella namnet. Däremot är denna benämning inte en garanti för att eleverna förstår betydelsen för likhetstecknet. Asta förklarade likhetstecknet på ett sätt som skapar en relationell förståelse för likhetstecknet, vilket eleverna hade tagit efter.

Observationerna visade att eleverna fick vara delaktiga i undervisningen, då de fick diskutera och resonera parvis, i större grupper samt visa och förklara hur de tänkte. På det här sättet fick eleverna möjlighet att lyssna på och lära sig av varandra, vilket stämmer överens med vad Essien (2009), Ahlberg (2005) och Emanuelsson et al. (2005) menar är viktigt. Det gör att eleverna lär sig av varandra samt får en bättre förståelse för likhetstecknet när de får möjlighet att höra hur andra tänkt och löst en uppgift. I intervjuerna framkom det att eleverna tidigare fått arbeta med klossar när de pratat om och arbetat med likhetstecknet. Curcio och Schwartz (2011) menar att klossar är ett bra sätt att konkretisera matematik, som annars är väldigt abstrakt. Med hjälp av klossar kan eleverna då visa att det ska vara lika många klossar på vardera sida av likhetstecknet, vilket främjar den relationella förståelsen för likhetstecknet. Eleverna i studien arbetade också kontinuerligt med likhetstecknet, bland annat i deras matematikbok. I matematikboken kommer det till exempel ofta uppgifter där de ska sätta ut ett likhetstecken om beräkningen stämmer, förklarade eleverna. Essien (2009) skriver att det är viktigt att läroböckerna som eleverna arbetar med använder sig av olika bilder och tal för att demonstrera likheter och olikheter samt främjar den relationella förståelsen av likhetstecknet. Detta kan göras genom att eleverna får arbeta med till exempel luckuppgifter. Eleverna i Astas klass arbetade med luckuppgifter som läraren gav dem, men det fanns även luckuppgifter i deras matematikböcker. I intervjuerna framkom också att eleverna fick arbeta med skilt från tecknet från årskurs 2, vilket eleverna upplevde underlättade deras förståelse för likhetstecknet. Innan introduktionen av skilt från tecknet var elevernas förståelse för likhetstecknet mer operationell, då de uppfattade likhetstecknet som att svaret på en beräkning skulle stå till höger om likhetstecknet. Efter introduktionen av skilt från tecknet uppfattade eleverna att det blev lättare att förstå att likhetstecknet betyder att det ska vara lika mycket i respektive led, vilket tyder på en relationell förståelse. Det stämmer överens med vad Hattikudir och Alibali (2010) skriver. Författarna menar att en undervisning där elever blir introducerade och får arbeta med likhetstecknet och skilt från tecknet samtidigt, gör att fler elever tillägnar sig den relationella uppfattningen av likhetstecknet. Vid en undervisning med enbart likhetstecknet är det lättare för elever att få den operationella förståelsen för likhetstecknet. En av elevgrupperna jämförde likhetstecknet med en våg, vilket tyder på en relationell förståelse för likhetstecknet där varje led är värt lika mycket. Ahlberg (2005) menar att det är bra att använda sig av en våg med två vågskålar för att introducera och skapa en

relationell förståelse för likhetstecknet hos yngre barn.

Genom observationerna och testet framkom det att ett fåtal elever hade både den operationella förståelsen och den relationella förståelsen av likhetstecknet, där den operationella förståelsen var större. Det framkom i uppgifter där beräkningen stod på höger sida av likhetstecknet eller vid luckuppgifter. Vid observationstillfället och intervjun efter testet kunde eleverna förklara hur de tänkt och då också se varför svaret de tänkt var felaktigt. Frågan är om det var slarv och att de var lite för snabbtänkta, eller om de har en mer operationell förståelse av likhetstecknet. Enligt Sterner (2012) visar svar likt dessa på att eleverna har en mer operationell förståelse av likhetstecknet, då eleverna helt enkelt tror att svaret ska stå på höger sida av tecknet samt att likhetstecknet betyder att en beräkning ska göras.

På testet motiverade tretton av sjutton elever att de satte ut ett likhetstecken på de ställen de gjorde för att det ska vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet. Vid observationerna och intervjuerna förklarade majoriteten av eleverna likhetstecknet på samma sätt, att det ska vara lika mycket på båda sidor. Det visar att de flesta elever i klassen har en relationell förståelse för likhetstecknet. Enligt Stephens et al. (2013) innebär det att likhetstecknet ses som en våg mellan det vänstra och det högra ledet, där de båda leden alltid ska vara lika mycket.

Elevers förståelse för likhetstecknet påverkas av vilka möjligheter de har att utveckla en relationell förståelse av likhetstecknet. Studien visar att en undervisning där läraren benämner och förklarar likhetstecknet som att det ska vara lika mycket i båda leden, där eleverna får arbeta med luckuppgifter, får stöd i sitt lärande av läraren, får möjlighet att resonera tillsammans med andra elever samt får arbeta med skilt från tecknet i samband med likhetstecknet, har större möjlighet att utveckla en relationell förståelse för likhetstecknet.

6.2 Reflektion av metodval

Det hade gått att göra en kvantitativ studie utifrån enbart testet med fler deltagare, vilket skulle kunna gett ett mer generellt svar på frågan om vilken förståelse för likhetstecknet som är vanligast i årskurs 3. Däremot är det inte rimligt att kvantitativt observera en lärares undervisning eller intervjua elever i ett arbete likt detta, då det kräver mycket tid. Lärare hade också kunnat besvara frågor om hur de undervisar om likhetstecknet genom enkäter. Detta hade gjort att fler svar från både lärare och elever inkommit. Däremot hade möjligheten att

ställa följdfrågor inte funnits och möjligheten att faktiskt se hur lärare arbetar med likhetstecknet i undervisningen hade inte heller funnits. Eftersom syftet med denna studie var att få en djupare förståelse för vilken förståelse elever har för likhetstecknet samt hur lärare undervisar om likhetstecknet, var det mer passande att använda sig av kvalitativa forskningsmetoder.

När eleverna intervjuades hade vissa elever det svårt att hålla sig till frågan, utan svävade lätt iväg och började prata om annat som inte var kopplat till frågan. Det var jag medveten om att det kunde hända redan innan intervjuerna började, så när några elever började sväva iväg styrde jag och elever som intervjuades samtidigt tillbaka den eller de elever som svävade iväg tillbaka till frågan igen. Därför var det bra att eleverna intervjuades i grupp, så att de kunde hjälpa varandra att resonera.

Läraren som observerades visste sedan innan vad denna studie avsåg att undersöka. Därför kom jag dit vid tillfällena som läraren hade planerat att undervisa om likhetstecknet på. Observationerna ägde rum vid tre tillfällena hos en och samma lärare, men det är svårt att veta om läraren alltid gör och undervisar om likhetstecknet på det här sättet eftersom läraren enbart observerades vid tre tillfällena. Vid intervjuerna framkom det att eleverna arbetar med likhetstecknet på fler sätt än vad som observerades vid dessa tillfällena. För att uppfylla syftet med studien har därför ett flertal olika metoder använts, men för bättre helhetsbild av hur lärare undervisar om likhetstecknet hade observationerna förmodligen behövt vara både fler och längre samt att fler lärare borde ha observerats. Däremot var det inte möjligt i denna begränsade studie.

6.3 Tillförlitlighet

Som jag skrev i kapitel 4, så menar Eliasson (2013) att en studie av hög reliabilitet ska kunna upprepas och få samma resultat, vilket gör att den då är pålitlig. I denna studie har det tydligt beskrivits hur data samlats in och analyserats samt vilka förutsättningar som funnits. Alla deltagarna gavs samma förutsättningar vid intervjuerna, då de utgick från samma frågor och testet som eleverna gjort. Alla deltagare gavs även samma förutsättningar vid testet, då alla deltagare fick samma test och gjorde det vid samma tillfälle. Observationerna dokumenterades med ett observationsschema som användes vid alla tillfällena, vilket gjorde att alla observationerna också utgick från samma förutsättningar.

Validitet beskriver Eliasson (2013) handlar om studien mäter det som avses mätas. I denna studie var syftet och frågeställningarna tydligt preciserade, för att inga misstolkningar av det som skulle undersökas skulle kunna uppstå.

Eftersom urvalet till studien gjordes med hjälp av personliga kontakter samt att studien var och genomfördes i begränsad skala, är det viktigt att ha i åtanke att det är svårt att generalisera en studie likt denna då resultatet är för litet.

6.4 Slutsats

Elevers möjligheter att utveckla en förståelse för likhetstecknet beror på hur läraren strukturerar och undervisar om likhetstecknet, men det beror också på hur läraren benämner och förklarar likhetstecknet. Benämner läraren likhetstecknet som "det blir" skapas en operationell förståelse för likhetstecknet, medan en benämning som "lika mycket på båda sidor" skapar en relationell förståelse. Läraren i denna studie benämnde likhetstecknet som "lika med" samt förklarade likhetstecknet som att det ska vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet, vilket gynnar elevers möjlighet att skapa en relationell förståelse för likhetstecknet. Ett fåtal elever i klassen visade på en större operationell förståelse än en relationell förståelse för likhetstecknet, då de såg likhetstecknet som en signal på att något ska genomföras och där svaret på beräkningen ska stå till höger om likhetstecknet. En varierad undervisning där eleverna får vara delaktiga, diskutera och resonera med varandra samt lyssna på varandras tankar och lösningar gynnar elevernas relationella förståelse för likhetstecknet, då de får lära sig av och tillsammans med varandra. En lärare som ställer rätt frågor för att stötta eleverna vidare i sin utveckling är också viktigt. Luckuppgifter och konkret material så som klossar och vågskålar är också något som främjar den relationella förståelsen, då eleverna får arbeta med att det ska vara lika mycket på respektive sida av likhetstecknet. Dessa slutsatser är något som stämmer väl överens med forskning som tidigare lyfts i detta arbete.

6.5 Vidare forskning och avslutande kommentarer

Eftersom denna studie var begränsad och i mindre skala, vore det intressant att genomföra en liknande studie där fler observationer, intervjuer och tester med fler klasser i samma årskurs gjordes. Detta för att kunna generalisera och jämföra resultaten mer. Det vore även intressant

att fördjupa sig i elevernas läromedel, eftersom eleverna nämnde att uppgifter med fokus på likhetstecknet var ständigt återkommande i deras läromedel.

Något jag tar med mig efter att ha genomfört denna studie är hur viktigt det är att benämna, förklara och arbeta med likhetstecknet och dess betydelse på rätt sätt. Elevernas framtida lärande och utveckling kan annars försvåras då deras uppfattning och förståelse av likhetstecknet kan problematisera det för dem när de exempelvis ska arbeta med ekvationer och variabler.

7 Referenser

- Ahlberg, A. (2005). Att se utvecklingsmöjligheter i barns lärande. I Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM) (red.) *Matematik från början* (ss. 9–98). Göteborg: Göteborgs universitet.
- Blanton, M., Brizuela, B., Gibbins, A., Kim, Y., Murphy Gardiner, A., Otálora, Y. & Sawrey. (2018). Exploring Kindergartens Students' Early Understandings of the Equal Sign. *Mathematical Thinking and Learning*. 20 (3), 167-201. doi:10.1080/10986065.2018.1474534
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46 (1), 39–87.
- Brinkjaer, U. & Høyen, M. (2013). *Vetenskapsteori för lärarstudenter*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Bråting, K. & Madej, L. (2017). Generaliserad aritmetik: En bro mellan aritmetik och algebra. *Nämnamnaren*, 2017 (4), 3–8.
- Byrd, C., Chesney, D., Matthews, P. & McNeil, N. (2015). A specific misconception of the equal sign acts as a barrier to children's learning of early algebra. *Learning and Individual Differences*, 38, 61-67. doi: 10.1016/j.lindif.2015.01.001
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Likhetstecknets innebörd (G. Sterner, övers. & bearb. kap.2 Equality). I *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Curcio, F. & Schwartz, S. (2011). Barns algebraiska tänkande. I Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) (red.), *Matematik – ett grundämne. Nämnamnaren TEMA 8* (ss. 133–138). Göteborg: Göteborgs Universitet.
- Emanuelsson, G., Johansson, B., Ryding, R. & Wallby, K. (2005). Arbetssätt och arbetsformer. I Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM) (red.), *Matematik – ett Kommunikationsämne* (ss. 11–26). Göteborg: Göteborgs universitet.
- Essien, A. (2009). An analysis of the introduction of the equal sign in three grade 1 textbooks. *Pythagoras*, 2009 (69), 28-35. doi: 10.4102/pythagoras.v0i69.43
- Grevholm, B. (2014). *Lära och undervisa i matematik från förskoleklass till åk 6*. Lund:

Studentlitteratur AB.

Grønmo, L. (2011). Likhetstecknets innebörd. I Nationellt Centrum för Matematikutbildning. (NCM) (red.), *Matematik – ett grundämne. Nämnaren TEMA 8* (ss.123–126). Göteborg: Göteborgs Universitet.

Hattikudur, S. & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(1), 15-30.
doi: 10.1016/j.jecp.2010.03.004

Löwing, M. (2006). *Matematikundervisningens dilemman: Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet*. Lund: Studentlitteratur AB.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning: En inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur AB.

Olteanu, C. (2014). Vad är algebra och varför behövs den. Hämtad från
<https://larportalen.skolverket.se/LarportalenAPI/api-v2/document/name/P03WCPLAR038645>.

Punsch, K.F & Oancea, A.E. (2014). *Introduction to research methods in education*. Sage Publications Ltd.

Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016). *TIMSS 2015 Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2018a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet. Reviderad 2018*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2018b). Nationellt bedömningsstöd i taluppfattning – förberedelse för avstämningar, höstterminen årskurs 3. Hämtad från
<https://bp.skolverket.se/delegate/download/view?testGuid=4139C1AA733544018FCC08EFBB1CCD86&documentGuid=AFF7ACF90EC34D0FBFAA66B76E1ED4B8>

Stephens, A., Knuth, E., Blanton, M., Isler, I., Murphy Gardiner, A. & Marum, T. (2013). Equation structure and the meaning of the equal sign: The impact of task selection in eliciting elementary students' understandings. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(2),

173-182. doi:10.1016/j.mathb.2013.02.001

Säljö, R. (2012). Den lärande människan. I U. P. Lundgren, R. Säljö & C. Liberg. (red), *Lärande skola bildning* (ss.139–198). Stockholm: Natur & Kultur.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Hämtad från <http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf>

8 Bilaga 1 – Missivbrev

Hej!

Julia Cajonberg heter jag och läser mitt fjärde och sista år på Mittuniversitetet, där jag läser grundskollärare med inriktning mot förskoleklass och årskurs 1–3.

Jag skriver ett självständigt arbete om likhetstecknets innebörd, där syftet är att undersöka barns förståelse för likhetstecknet. För att mitt arbete ska bli så bra som möjligt kommer jag att observera när ditt barns lärare undervisar om likhetstecknet och dess innebörd. Jag kommer också att genomföra ett mindre test där likhetstecknets innebörd står i fokus samt intervjua elever i mindre grupper. Detta gör jag för att ta reda hur eleverna uppfattar och vad de kan om likhetstecknet.

I mitt arbete kommer eleverna, läraren och även skolan att vara anonyma och eleverna och läraren kan när som helst avbryta sitt deltagande i studien. Under intervjuerna kommer jag att använda mig av ljudupptagning för att jag på bästa sätt ska kunna bearbeta materialet. Det är endast jag som kommer lyssna på ljudupptagningen och den tas såklart bort när materialet är bearbetat.

Vid frågor:

XXXXX@gmail.com eller 07X-XXX XX XX.

Hoppas att ditt barn vill intervjuas!

Godkänner du att ditt barn får
intervjuas?

JA NEJ
Underskrift av vårdnadshavare

Vill du intervjuas?

JA NEJ
Underskrift av elev

9 Bilaga 2 - Testfrågor till elever

Namn: _____ Klass: _____

Ett test i matematik

Fyll i de tal som saknas.

$12 + 4 = \underline{\quad}$

$2 + 5 = 5 + \underline{\quad}$

$8 + 4 = \underline{\quad} + 5$

$20 = \underline{\quad} + 5$

$18 + \underline{\quad} = 24 + 4$

$20 - 5 = \underline{\quad}$

$36 - 6 = \underline{\quad} - 10$

$27 = \underline{\quad} - 2$

$14 = 22 - \underline{\quad}$

$15 - \underline{\quad} = 17 - 5$

$\underline{\quad} - 8 = 10$

$\underline{\quad} + 23 = 30 - 6$

Sätt ut = på de linjer där det stämmer.

$25 \underline{\quad} 25 + 0$

$10 + 2 \underline{\quad} 15 - 3$

$33 - 5 \underline{\quad} 28 + 5$

$14 + 2 \underline{\quad} 8 + 8$

$6 - 1 \underline{\quad} 3 + 4$

$20 - 7 \underline{\quad} 9 + 4$

Förklara varför du valde att sätta ut = på de ställen som du gjorde.

10 Bilaga 3 – Intervjufrågor till elever

- Vet ni vad det här är för tecken (=)? Vad betyder det tecknet? Finns det något tecken som är likt det tecknet? Vad betyder det? Hur har du lärt dig det tecknet?
- Vad vet du om (likhets)tecknet? Hur har du fått lära dig om (likhets)tecknet?
- Hur brukar din lärare förklara vad (likhets)tecknet betyder?
- Hur har du fått träna på (likhets)tecknets betydelse?
- Hur känns det när du arbetar med (likhets)tecknet? Känner du dig säker, är det svårt, roligt eller tråkigt?
- Hur skulle du förklara (likhets)tecknets betydelse för någon som inte vet vad tecknet betyder? Vad bör den personen tänka på?

11 Bilaga 4 – Observationsschema

<p>Hur benämner och förklarar läraren likhetstecknet?</p>	<p>Hur struktureras lektion? Hur får eleverna arbeta med likhetstecknet?</p>
<p>Hur verkar eleverna uppleva att arbeta med likhetstecknet? Roligt, tråkigt, jobbigt eller intressant? Hur märks det?</p>	<p>Hur delaktiga får eleverna vara i lektionen?</p>
<p>Vilken förståelse visar eleverna att de har om likhetstecknet? Hur?</p>	<p>Hur undervisar läraren om likhetstecknet? Används andra symboler? Vilka uppgifter och exempel använder sig läraren av?</p>

