Matematiska samtal på Youtube

Olika matematikdiskurser i Youtubevideor och deras kommentarsfält

Melker Epstein

Självständigt arbete i matematikdidaktik för ämneslärare
Högskolepoäng: 15
Termin/år: VT 2018
Handledare: Helena Johansson
Examinator: Sam Lodin
Kurskod: MA030A
Utbildningsprogram: Kompletterande pedagogisk utbildning, Ämneslärare åk 7-9 och Gymnasielärare.

Sammanfattning

Allt fler människor använder sig av Youtube och andra öppna internetmiljöer för att lära sig matematik. Enligt tidigare studier finns det en stor spridning när det gäller bostadsort och ålder bland deltagarna i dessa miljöer. Min undersökning visar att ett urval om 10 Youtubevideor om ekvationslösning och deras kommentarsfält också kännetecknas av en stor spridning av matematikdiskurser bland deltagarna. En studie av 85 dialoger i kommentarsfälten visar att i omkring hälften av dialogerna uttrycker sig olika deltagare på sätt som kännetecknar olika matematikdiskurser, medan i den andra hälften alla deltagare uttrycker sig på sätt som kännetecknar samma matematikdiskurs. De förra dialogerna slutar mer sällan med att deltagarna upplever förståelse, medan lärandet i de senare dialogerna begränsas av vad som går att uttrycka inom ramen för den rådande diskursen. Genom att utveckla begrepp och kategorier för att beskriva matematikdiskurserna lägger studien grunden för fortsatt forskning, både kvalitativa med intervjuer av deltagare och kvantitativa med större material.

Nyckelord: *ekvationslösning, kommentarsfält, internet, matematikdiskurser, samförståndsdomäner, Youtube*

Abstract

The use of Youtube and other open internet environments for learning mathematics is becoming increasingly common. According to earlier studies there is a great diversity of ages and nationalities among participants in these environments. My investigation shows that a selection of 10 Youtube videos about equation solving and their comments sections also are characterized by a diversity of mathematics discourses. A study of 85 dialogues in the comments sections shows that in approximately half of the dialogues different participants express themselves in manners characteristic of different mathematics discourses, while in the other half all the participants express themselves in manners characteristic of the same mathematics discourse. The former dialogues more seldom end with experiences of understanding, while learning in the latter group of dialogues is limited by what is possible to express within the dominant discourse. By developing terms and categories for describing the mathematics discourses this study lays the foundation for further research, both qualitative research comprising interviews with participants and quantitative research on greater amounts of data.

Keywords: comments sections, consensual domains, equation solving, internet, mathematics discourses, Youtube

Innehållsförteckning

1 Inledning

Informationsteknologin och internet har fört med sig nya typer av miljöer för lärande. Elever har tidigare lärt sig matematik i realtid i ett klassrum med ett fåtal deltagare eller ensamma med en lärare, men idag lär de sig också i miljöer där de kan spola tillbaka det läraren säger, enbart kommunicerar i skrift, eller med hjälp av datorprogram tillsammans konstruerar geometriska figurer (Borba 2005; Borba & Zulatto 2006; Lazarus & Roulet 2013). De gör detta tillsammans med eleverna på deras egen skola, eller tillsammans med okända människor från andra sidan jorden (Kramarski & Dudai 2009, van de

Sande 2011). Platserna de möts på kan vara både slutna, i meningen att det krävs att deltagarna tillhör en viss kurs eller institution, och öppna, i meningen att vem som helst kan delta (van de Sande, 2011).

Det är viktigt att vi förstår vad som händer i de öppna lärandemiljöerna inte minst därför att allt fler människor besöker dem. Enligt undersökningen EU Kids Online (2014) använde 2014 33 % av barn i åldern 9-16 år i EU internet för skolarbete, mot 18 % 2010. I samma grupp såg 59 % dagligen på videoklipp på internet. Det är oklart hur många av dessa som tittade på klipp med samband med skolarbetet, men en studie (Purcell 2013) bland vuxna amerikaner visar att 64 % av dem som såg på videoklipp på internet såg på klipp med utbildningsmässigt innehåll.

I jämförelse med elever i fysiska klassrum finns det en större spridning när det gäller bostadsort, härkomst och ålder hos deltagarna i de öppna onlinemiljöerna (van de Sande 2011). Dock saknas det än så länge forskning om deltagarnas matematiska bakgrunder. De olika deltagarnas matematiska bakgrund är intressant i kontexten av studier som Richards (1991) och Yackel och Cobb (1996), som understryker vikten av en gemensam diskurs för att lärande ska kunna ske. Mötet mellan deltagare med olika matematisk bakgrund är också intressant i kontexten av Kellners och Kims (2010) vision om internet som en mer jämlik och demokratisk plats för lärande.

Syftet med min studie är att beskriva de praktiker och diskurser (sätt att tala om något) som förekommer i matematikdidaktiska videor på Youtube och deras kommentarsfält, och att undersöka hur mötet mellan diskurserna påverkar elevernas förståelse och lärande. Jag gör detta huvudsakligen utifrån två forskningsfrågor: vilka olika sätt att göra och tala om matematik förekommer i en öppen onlinemiljö, och hur påverkar mötet mellan dessa sätt att göra och tala om matematik vad deltagarna lär sig? I enlighet med Glasers och Strauss (1967) rekommendationer för forskning på nya områden gör jag en utforskande, i huvudsak kvalitativ studie av ett mindre material, tio videor och deras kommentarsfält. Jag har valt att arbeta med videor om linjära ekvationer dels eftersom det finns många och populära videor som handlar om ämnet, och dels eftersom de är av central betydelse i algebran, som bereder många elever särskilda svårigheter (Herscovics & Linchevski 1994).

2 Bakgrund

2.1 Internet som en plats för lärande utanför skolan

Lärande i skolans ämnen sker både i klassrummet och utanför det (Nunes 2010). Viktiga teman i forskningen om lärande utanför klassrummet är hur människor styr sitt eget lärande (self-directed learning) (Knowles 1975; Lee, Osop, Goh & Kelni 2017), hur de tar hjälp av andra (help-seeking) (Puustinen, Bernicot, Volckaert-Legrier & Baker 2015; van de Sande 2011), och hur de lär sig av varandra (peer learning) (Kear 2004, Topping 2005). Alla dessa aspekter av lärande är aktuella när det gäller människor som tittar på och kommenterar didaktiska videor på internet.

Den informations- och kommunikationsteknologiska utvecklingen har skapat nya möjligheter för lärande utanför klassrummet (Kellner & Kim 2010). För några decennier sedan hade de flesta människor, och då särskilt skolelever, ett begränsat nätverk av andra som de kunde vända sig till för att lära sig: föräldrar, vänner, kanske en lärare i mån av tid. Idag kan de allra flesta kommunicera med andra som intresserar sig för och har kunskap om många ämnen (Kellner & Kim 2010). Mer än hälften av världens befolkning använder regelbundet internet.(”World Internet Usage and Population Statistics” 2018) Det finns också nya resurser för att styra sitt eget lärande, som till exempel glosövningsprogram och hemsidor som kartlägger den lärandes framsteg. Den här tillgängligheten innebär nya möjligheter inte minst för sådana elever som annars inte har tillgång till föräldrar, vänner eller privatlärare som kan hjälpa dem (Bernard 2009).

2.2 Förändrade former för lärande på internet

Att diskutera med andra över internet är inte bara en ersättning för eller ett alternativ till att fråga sina föräldrar eller vänner, det är en annan sorts social interaktion och en annan sorts kommunikation. En aspekt av det här är att människor som diskuterar över internet inte kan använda gester och tonlägen, utan i stället använder symboler som till exempel smileys. När det gäller matematik finns det också en skillnad mellan att skriva med penna på papper och på en dator, inte minst när datoranvändaren skriver snabbt eller inte har tillgång till program för att redigera matematiska uttryck (Borba 2005, Borba & Zulatto 2006 och van de Sande 2011). Att allt som sägs i en konversation på internet skrivs ned innebär också att deltagarna när som helst kan gå tillbaka och studera det som sagts tidigare, det skapas ett slags protokoll över konversationen. Borba (2005) menar att den här formen av skrivna matematiska konversationer kan anses vara en ny sorts matematik, som behöver utforskas bättre.

Dessa protokoll är också intressanta eftersom de ofta är både offentliga och anonyma på ett sätt som skiljer sig mycket från fysiska konversationer. Många andra användare kan läsa det som en användare skriver inte bara i ögonblicket när det skrivs, utan också timmar eller månader senare. Samtidigt är interaktionen anonym i den meningen att deltagarna inte känner varandra sedan tidigare, och oftast inte ser varandras ansikten. van de Sande (2011) finner i sin studie av ett forum för hjälp med matematikuppgifter att vissa deltagare utnyttjar sin anonymitet genom att försöka dra nytta av andra så mycket som möjligt utan att ge någonting tillbaka, medan andra ställer konstruktiva frågor och visar sin uppskattning.

Att deltagarna inte är sammanbundna på samma sätt sedan tidigare innebär också intressanta möten mellan människor som kommer från olika traditioner, inte minst olika matematiktraditioner. van de Sande (2011) noterar att deltagarna på matematikforumet hon studerar kommer från hela världen och från olika matematiska bakgrunder, och detta är kanske i ännu högre grad sant för kommentatorerna på Youtube. De flesta är elever eller lärare i skolor runt om i världen, men de kommer ofta från olika traditioner av matematikundervisning. De är vana vid olika former av matematiska praktiker och vid olika sätt att använda matematiska begrepp.

Det är också intressant att undersöka om den öppna och jämlika formen hos interaktionen på internet gynnar bestämda matematiska praktiker. I skolan, menar till exempel Houssart (2001) i sin studie av elever som viskar under matematiklektionerna, finns det frön till ett undersökande förhållningssätt hos eleverna, men som inte utvecklas eftersom läraren styr diskussionen efter en strikt mall. I kontrast till detta menar Kellner och Kim (2010) att internet skulle kunna bli en plats där människor lär sig på ett mer jämlikt och undersökande sätt än i skolan. På internet, skriver de, kan de förtryckta få möjlighet att "höja sina autentiska röster" (s. 7).

2.3 Matematiklärande på Youtube i kontexten av tidigare studier

Liksom Borba (2011) och van de Sande (2011) påpekar är forskningen om lärande på internet, och då särskilt matematiklärande, än så länge i sin linda. I allmänhet är det så att det finns mer forskning om lärande på internet för sådana ämnen som är mer praktiska. En sökning på "youtube + education" på Google Scholar (2018-03-19) ger 61 träffar som handlar om specifika ämnen bland de första 100 träffarna. Av dessa 61 artiklar handlar 40 om utbildning inom medicinska vetenskaper eller hälsa, 9 om utbildning inom musik eller konst, och 5 om utbildning inom språk. Jag har inte lyckats hitta en enda artikel som handlar specifikt om Youtube och matematiklärande.

I den existerande forskningen om inlärning via internet ligger fokus oftast på metoder som explicit integrerats i den formella undervisningen. Det här gäller inte minst för forskningen om matematiklärande. Till exempel har Kramarski och Dudai (2009) undersökt effekten av att öva på metakognitiva matematikfärdigheter i ett specialdesignat internetforum som en del av den ordinarie undervisningen, och Lazarus och Roulet (2013) har studerat hur man kan bygga upp en miljö för gemensamt lärande i en skolklass genom videor och interaktiv programvara.

Den forskning som handlar specifikt om Youtube och kommentarsfält handlar inte, liksom jag nämnt ovan, om matematik. Särskilt sällsynt är forskning som behandlar kommentarsfälten. Ett exempel på en studie med ett liknande forskningsobjekt är Lees et al. (2017) artikel om kommentarsfälten till programmeringsdidaktiska videor. Lee et al. intresserar sig framför allt för vilka känslor som deltagarna uttrycker i videorna, och för huruvida Youtubemiljön uppmuntrar eget initiativ. Deras slutsats är att deltagarna uttrycker olika positiva känslor i samband med sitt lärande, och att de deltagare som uttrycker mest positiva känslor också verkar vara de som får ut mest av filmerna.

Även om det i princip inte finns någon forskning som studerar lärande i matematik och kommentarsfälten på Youtube, så finns det ett fåtal studier av om matematiklärande i liknande miljöer. Framför allt gäller det öppna fora på internet för hjälp med matematikuppgifter. Youtube liknar dessa miljöer i den meningen att det också handlar om en öppen plats för asynkron kommunikation mellan användare från hela världen. De här studierna fokuserar framför allt på hur användarna söker hjälp (help-seeking). Till exempel studerar van de Sande (2011) hur elever som söker hjälp med sina hemuppgifter på forumet mathhelpforum.com förhåller sig till den respons de får från forumets andra medlemmar. van de Sande utforskar olika former av respons och beteenden i förhållande till responsen, och ställer frågor om hur internetmiljön påverkar det matematiska innehållet i diskussionerna. Puustinen et al (2015) studerar på vilket sätt elever som söker hjälp med hemuppgifter ställer sina frågor, och hur det påverkar den fortsatta konversationen med andra användare på forumet.

En intressant aspekt av sådana här öppna internetfora är deras förhållande till skolundervisningen. van de Sande (2011) understryker att forumdeltagarnas mål i allmänhet är att lösa en uppgift som de fått i läxa av sin ordinarie lärare, eller att få en förklaring till lösta exempel ur läroböcker eller lösningsmanualer. I den mån som matematiken i skolan är skolmatematik (school mathematics, Richards 1991), alltså ett sätt att göra matematik som fokuserar på att lösa uppgifter med hjälp av bestämda metoder, så sker aktiviteten på matematikforumet också inom ramen för den traditionen. Samtidigt kan sådana matematikuppgifter från elevernas skolundervisning enligt van de Sande (2011) också innebära en öppning för djupare och mer generella diskussioner, till exempel om vilka regler som är giltiga och varför. I förhållande till detta är det särskilt intressant att studera kommentarer till matematikdidaktiska Youtubevideor, eftersom de kanske inte är lika starkt kopplade till behovet av att lösa en uppgift och därför också skulle kunna stå friare från skolmatematiken.

Både Lee et al. (2017) och van de Sande (2011) fokuserar mer på allmänna än på ämnesspecifika praktiker och sätt att kommunicera. De fokuserar också mer på hur deltagarna talar med varandra än på vad de talar om. Lee et al. intresserar sig framför allt för olika uttryck för känslor i kommentarsfälten, som till exempel tacksamhet eller glädje, medan van de Sande intresserar sig för dynamiken mellan människor som söker hjälp och människor som hjälper. Kramarski och Dudai (2009) och Lazarus och Roulet (2013), å sin sida, undersöker mer matematiska aspekter av digital undervisning men gör det i samma sociala sammanhang som vanlig undervisning.

Det behövs alltså mer forskning om de matematiska aspekterna av öppna internetmiljöer. Det handlar inte bara om hur deltagarna talar om matematik, utan också om vilka synsätt på matematiken som finns representerade bland dem. Internetmiljöerna skiljer sig inte från fysiska miljöer för lärande bara genom kommunikationens art, utan också genom vilka som deltar. van de Sande (2011) skriver att deltagarna kommer från olika delar av världen, vilket innebär att de har erfarenheter av olika samhällen. På ett liknande sätt skulle man kunna tänka sig att deltagarna kommer från olika matematiska bakgrunder. Det handlar både om de matematiska praktiker de är vana vid och deras inställning till dessa praktiker.

3 Syfte och frågeställning

I min studie vill jag utforska de matematiska praktiker och diskurser som uppträder i en viss öppen internetmiljö, matematikdidaktiska videor på Youtube och deras kommentarsfält. Jag vill se vilka matematiska praktiker och diskurser som presenteras i videorna, och jämföra det med de matematiska praktiker och diskurser som uppträder i kommentarsfälten. Jag vill också undersöka hur det faktum att deltagarnas sätt att tala om och göra matematik liknar eller skiljer sig från varandra påverkar hur deltagarna interagerar, vad de förstår och vad de lär sig. Genom att sätta mina resultat i kontexten av de mer allmänna drag hos interaktioner i öppna internetmiljöer som bland annat van de Sande (2011) beskriver hoppas jag kunna bidra till en mer fullständig bild av matematiklärande i dessa miljöer.

4 Teoretiska utgångspunkter

Lärande är både en individuell och en social process.(Salomon & Perkins 1998) Vad en människa lär sig beror både av hennes egna idéer, av idéerna hos de människor hon lär sig av eller tillsammans med, och av det sociala sammanhang som hon lär sig i. Hon skapar sig en egen bild av världen, som hon utvecklar genom att kommunicera med andra. Därför går det att studera hur människor lär sig både från ett individuellt perspektiv, med hjälp av kognitionsvetenskapliga teorier, och från ett socialt perspektiv, med hjälp av sociologiska teorier. Exempel på det individuella kognitionsvetenskapliga perspektivet är bland annat Piagets (1970) teorier om människans kognitiva utvecklingsstadier och Hutchins (1995) studier av tänkande och lärande i naturliga situationer. Exempel på det sociala perspektivet är Vygotskijs (1978) teorier om hur lärande sker genom dialog och samarbete, och Rogoffs (1997) tankar om hur människan utvecklas kognitivt genom att delta i sociala sammanhang.

För att förstå vilka matematiska praktiker som utövas på Youtube och hur matematisk kommunikation sker eller inte sker kommer jag att använda mig av matematikdidaktiska teorier som tar hänsyn till både den psykologiska och den sociala aspekten, och beskriver växelverkan mellan dem. Två forskare som under lång tid har ägnat sig åt att utveckla en teori för detta är Paul Cobb (Cobb, Stephan, McClain & Gravemeijer 2011), och Erna Yackel (Yackel & Cobb 1996).

4.1 Ett socialt och ett psykologiskt perspektiv

Cobb et al. (2011) korrelerar ett socialt perspektiv, där man talar om praktiker och normer, med ett psykologiskt perspektiv, där man talar om tolkningar, resonemang och trosföreställningar. De sammanfattar korrelationen i det schema som visas i tabell 1.

Social Perspective	Psychological Perspective
Classroom social norms	Beliefs about own role, others' roles, and the general nature of mathematical activity in school
Sociomathematical norms	Mathematical beliefs and values
Classroom mathematical practices	Mathematical interpretations and reasoning

Tabell 1, Ett socialt och ett psykologiskt perspektiv på elevers matematiklärande, enligt Cobb et al. (2011, s. 122)

Cobb et al. (2011) beskriver ett socialt perspektiv främst hämtat från sociokulturell teori. Nyckelbegreppet i den sociokulturella teorin är kulturell praktik (cultural practice), ett normativt sätt att handla som har utvecklats över tid bland en grupp av människor. Man tänker sig ofta att människor i en grupp introduceras till praktiker som redan existerar, men Cobb et al. menar att praktikerna är någonting som eleverna och lärarna i det enskilda klassrummet bygger upp genom sin interaktion. Cobbs synsätt passar bra för längre studier av grundskoleklassrum, vilket Cobb och Yackel tillsammans med flera andra forskare har ägnat sig åt, eftersom åtminstone eleverna kommer till klassrummen utan att ha med sig erfarenheter av bestämda matematiska praktiker. När det gäller Youtube-videorna och deras kommentarsfält har deltagarna däremot erfarenheter av matematisk praktik från sin egen skolgång, samtidigt som interaktionerna dem emellan i Youtube-miljön är mindre intensiva. Därför kan det vara bra för mig att ha med mig också det perspektiv där de sociala praktikerna ses som element i en redan existerande tradition.

Enligt Cobb et al. (2011, s. 125) styr sociala normer på vilket sätt människor deltar i sociala praktiker. Normerna "dokumenterar regelbundenheter i klassrummet". Yackel och Cobb (1996) definierar sociomatematiska normer (socio-mathematical norms) som en särskild undergrupp av sociala normer. Medan sociala normer gäller många olika sorters aktiviteter gäller sociomatematiska normer specifikt matematisk aktivitet. Yackel och Cobb exemplifierar med normen att elever skall bidra med lösningsförslag som skiljer sig från dem som tidigare har givits. Den här normen är en social norm, men normen att ett lösningsförslag skall vara matematiskt annorlunda är en sociomatematisk norm. Andra exempel på sociomatematiska normer som Yackel och Cobb ger är normer för vad som är matematiskt sofistikerat, och för vad som är en godtagbar matematisk förklaring.

Nyckelbegreppet i Cobbs et al. (2011) psykologiska perspektiv är resonemang (reasoning). Att resonera ses som en aktivitet, där såväl förståndet (intelligence) som kroppen och symboler deltar (s. 124). Det här mer holistiska perspektivet ska enligt Cobb et al. ses som en kontrast till ett mer analytiskt perspektiv, där individen bearbetar information och skapar inre representationer av yttre objekt. Olika former av matematiska resonemang (s. 127) hänger ihop med olika trosföreställningar och värden. Till exempel hänger ett undersökande sätt att resonera ihop med trosföreställningen att matematiska förklaringar bör beskriva operationer på matematiska objekt, och inte bara hänvisa till inlärda procedurer (Yackel & Cobb 1996 s. 473).

4.2 Förhållandet mellan lärandets sociala och psykologiska aspekter

För att förstå hur det psykologiska samverkar med det sociala använder sig Yackel och Cobb i huvudsak av två sociologiska teorier, etnometodologi och symbolisk interaktionism (Yackel & Cobb 1996 s. 459, Cobb et al. 2011 s. 122-124). Grundtanken i etnometodologin är att människor är rationella aktörer som använder sitt praktiska förnuft för att förstå världen och verka i den. Detta innebär inte minst att de är medvetna om andra människors avsikter och handlingar, och att de försöker förstå dessa handlingar utifrån antagandet att andra också är rationella aktörer som använder sitt praktiska förnuft. Det här fenomenet kallas reflexivitet (reflexivity). Genom att sociala situationer är reflexiva, så är det som var och en gör i en social situation också någonting som de andra närvarande gör tillsammans med honom eller henne. Till exempel skriver Erickson (1980 s. 8) att konversationer genom reflexiviteten är någonting som deltagarna producerar tillsammans. På ett liknande sätt är kompetens i många situationer någonting som människor har tillsammans, eftersom det som var och en kan göra förutsätter att han eller hon interagerar med andra (Mehan 1979, s. 4).

Blumer (1969, s. 4-5) sammanfattar tre grundtankar i den symboliska interaktionismen. För det första handlar människor gentemot andra varelser och föremål utifrån den betydelse som varelserna och föremålen har för dem. För det andra får varelserna och föremålen sin betydelse genom människors sociala interaktion. För det tredje behandlas och förändras dessa betydelser genom en tolkningsprocess som äger rum i människans möte med sin omvärld.

I studiet av matematiklärande lägger Yackel och Cobb särskilt stor vikt vid Blumers andra grundtanke, som de benämner interaktivt betydelsebildande (interactive constitution of meaning).(Yackel & Cobb 1996, s. 470) Tanken är att matematiska begrepp får en viss betydelse för människor som lär sig matematik genom den sociala interaktion som de deltar i, och att den här sociala interaktionen i sin tur får sin form genom deltagarnas förståelse av begreppen. Det kan handla om de förslag som andra elever ger när de ska ge exempel på ett matematiskt objekt, och om vilka exempel som läraren och andra elever accepterar (1996 s. 474).

Enligt Yackel och Cobb (1996, s. 460) och Cobb et al. (2011, s. 128) är relationen mellan det sociala och psykologiska perspektivet reflexiv, i meningen att de enskilda deltagarna i en matematisk praktik handlar utifrån sina trosföreställningar om de sociala normerna, samtidigt som de normer som utvecklas beror av de enskilda deltagarnas trosföreställningar. Den här processen består inte minst i ett interaktivt betydelsebildande, där deltagarna utvecklar begrepp som *matematiskt annorlunda* eller *matematisk motivering*.

4.3 Förutsättningar för matematiska praktiker och matematisk kommunikation

Utifrån den här bilden av hur det psykologiska samverkar med det sociala går det att göra en ansats att besvara frågan om vilka förutsättningarna är för att matematiska sätt att resonera, matematisk kommunikation och bestämda matematiska sociala praktiker ska vara möjliga. Svaret på den här frågan är centralt för min undersökning om matematikdidaktiska Youtubevideor och deras kommentarsfält, eftersom det kan hjälpa till att förklara varför deltagarna förstår eller inte förstår varandra och vilka effekter det har på deras lärande.

Här kommer jag framför allt att använda mig av John Richards forskning, som också inspirerat Yackel och Cobb (1996). Richards (1991) använder sig av etnometodologin i kombination med Humberto Maturanas begrepp samförståndsdomän (consensual domain) för att beskriva hur människor kan förstå varandra och handla tillsammans på ett väl fungerande sätt, och hur ett sådant tillstånd uppkommer genom deras interaktion. Människor som befinner sig i en samförståndsdomän beter sig som om de hade kommit överens om de grundläggande principerna för deras interaktion. Maturana (1978) kallar processen som leder fram till bildandet av en samförståndsdomän för strukturell koppling (structural coupling). Den går ut på att deltagarna medvetet eller omedvetet anpassar sina handlingar till varandra. Richards menar dessutom att den strukturella kopplingen sker på ett reflexivt sätt, alltså att deltagarna i processen tänker på de andra deltagarnas trosföreställningar och avsikter.

Från ett mer psykologiskt perspektiv kan samförståndsdomänen karakteriseras som ett tillstånd där deltagarna i interaktionen har ganska väl utvecklade trosföreställningar om vad de andra deltagarna tänker. Varje deltagare tolkar de andra deltagarnas handlingar i ljuset av dessa trosföreställningar, samtidigt som handlingarna kontinuerligt bekräftar trosföreställningarna. Richards (1991, s. 19) skriver "through reflexivity, participants establish that they are in the same ball game". Cobb (2011, s. 124) och Yackel (1998, s. 471) beskriver sådana här trosföreställningar som tagna-för-delade (taken-as-shared).

Enligt Richards är olika former av kommunikation möjlig i olika samförståndsdomäner. Han kontrasterar två olika typer av samförståndsdomäner som kan uppstå i samband med matematikundervisning, skolmatematik (school mathematics) och undersökande matematik (inquiry mathematics). Skolmatematiken kännetecknas av att en syn på matematiken som en samling fakta eller procedurer. Lärarens roll är att överföra den här informationen till eleverna. Han eller hon kontrollerar vad som händer i klassrummet genom att initiera all dialog, ställa kontrollfrågor och minimera spontan interaktion. Richards beskriver detta som en begränsad diskurs, där eleverna aldrig konverserar med varandra (1991, s. 30).

Den undersökande matematiken kännetecknas däremot av en dialog eller en konversation, där deltagarna utväxlar idéer och förmodanden. De ställer öppna frågor till varandra av den typ som George Pólya rekommenderar i sin bok How to solve it (1945). "Kan du lösa problemet på ett annat sätt?" "Har du löst något annat problem som liknar det här?".Genom den här formen av dialog börjar matematiker se betydelsen av nya problem, och skapar nya metoder för att lösa dem (Richards 1991, s. 25-26). Inom ramen för den undersökande matematiken lär sig den enskilda eleven matematik genom att konstruera en del av den matematik som matematikersamfundet konstruerat under historien. Det här blir möjligt genom att eleven interagerar och diskuterar med andra som tillhör samfundet av undersökande matematiker, och på så sätt lär sig den undersökande matematikens språk och deltar i dess samförståndsdomän (Richards 1991, s. 26-27).

Enligt Yackel och Cobb (1996, s. 461) kännetecknas klassrum i den undersökande matematiktraditionen av att elever och lärare tar vissa normer för delade. Det rör sig dels om normer för vad som är ett värdefullt bidrag till en diskussion i ett visst ögonblick, och dels om normer som gäller hur man bidrar på ett bra sätt. Den första typen av normer gäller bland annat vad som är annorlunda, sofistikerade, effektiva och eleganta lösningar, medan den andra typen av normer bland annat gäller vad som är godtagbara matematiska förklaringar och rättfärdiganden.

5 Metod

Det finns inga utvecklade teorier om matematisk kultur i öppna asynkrona diskussionsmiljöer på internet, och inte heller några studier med specifikt fokus på matematisk kultur på Youtube. Därför kan jag heller inte ägna mig åt att bekräfta eller förkasta en etablerad teori eller tidigare studier. I stället blir det naturligt för mig att se hur jag kan utveckla och anpassa de teorier som finns för matematisk kultur i lärandemiljöer för att beskriva vad som händer på Youtube.

van de Sande (2011), som gjort en undersökning av en liknande outforskad miljö (ett forum på läxhjälp på internet), beskriver sin undersökning som en utforskning (exploration) snarare än en bekräftelse (confirmation). Det handlar om att besöka forumet, studera diskussionerna och försöka hitta bra begrepp för att beskriva vad som händer. van de Sande intresserar sig framför allt för dynamiken mellan dem som söker hjälp med uppgifter och de som erbjuder hjälp. Hon inför olika begrepp för att beskriva på vilket sätt de som söker hjälp är aktiva i en tråd.

Cobb et al. (2011) gör också en explorativ undersökning, i deras fall av matematiska praktiker i klassrum. Eftersom de har ett stort material av intervjuer och anteckningar behöver de en metod för att analysera det här materialet systematiskt. I det här syftet väljer de att använda sig av en variant av Glasers och Strauss (1967) så kallade konstanta jämförelsemetod (constant comparison method). Glaser och Strauss ser forskarens uppgift som att ge en konsekvent analys av meningen (meaning) hos de aktiviteter och samtal som de studerar. I det här syftet föreslår forskaren efter hand som han eller hon samlar in data teman eller kategorier (begrepp) som beskriver data. Forskaren jämför sedan dessa begrepp med nya data för att se om de går att generalisera (Cobb et al. 2011, s. 129). Den här utforskande aktiviteten är av kvalitativ karaktär, men enligt Glaser och Strauss (1967, s. 101) förbereder den för framtida kvantitativ forskning genom att ge förslag på variabler att undersöka.

I och med att jag undersöker en stor mängd data inom ett outforskat område som redan är i formen av text – Youtubefilmernas kommentarsfält – så skulle Glasers och Strauss metod kunna vara lämplig också för min undersökning. Samtidigt krävs det vissa förändringar. Medan Glaser och Strauss utgår från att forskaren skapar nya begrepp med utgångspunkt i data, så väljer Cobb et al. (2011) att börja med begrepp från tidigare forskning, som de sedan utvecklar. Det är rimligt för mig att göra samma val, eftersom det redan finns teorier om matematikkultur som jag kan utveckla och anpassa till mitt område.I mitt fall rör det sig framför allt om de begrepp från Cobbs, Yackels och Richards forskning som jag har redogjort för i teoriavsnittet ovan.

En skillnad på min undersökning och Cobbs, Yackels och Richards är att jag inte är en deltagande observatör i ett klassrum, utan en anonym observatör på internet. Cobb et al. (2011, s. 130) menar att forskaren genom att delta i lärandeprocessen i klassrummet kan förstå och analysera meningen i den sociala aktiviteten på ett sätt som är omöjligt om han eller hon bara observerar. När jag observerar kommentarsfälten på Youtube befinner jag mig på ett sätt i en liknande situation, eftersom jag har lika stor tillgång till diskussionerna som skribenterna och deltar på samma sätt som många andra, genom att läsa kommentarerna. Däremot lär varken jag eller någon av deltagarna i kommentarsfältet känna de andra deltagarna som personer, på det sätt som man gör i ett klassrum. Det är en öppen fråga på vilket sätt det är möjligt för vare sig observatörer eller deltagare att förstå meningen i och kontexten för det som skrivs i kommentarsfältet, givet att kommunikationen sker så anonymt och enbart i form av text.

Eftersom jag gör en utforskande studie kommer min begreppsliga och teoretiska förståelse att utvecklas allt eftersom jag arbetar med materialet. Glasers och Strauss tanke med den konstanta jämförelsemetoden är att det här ska ske på ett systematiskt sätt, med en genomtänkt plan för arbetet med materialet. Cobb et al. delar i linje med detta in sin forskning i två faser. I den första fasen går de igenom sitt material kronologiskt och för en loggbok över förmodanden, vederlägganden och revideringar (2011, s. 131) I den andra fasen gör de en mer övergripande analys av materialet, och försöker avgöra vilka av deras förmodanden som stöds av materialet i dess helhet.

Cobb et al. analyserar i första hand sitt material på nivån av episoder (episodes), som de beskriver som ett händelseförlopp där ett enskilt matematiskt tema står i fokus för aktivitet och diskussion. Det kan till exempel handla om elevers försök att mäta en sträcka genom att lägga linjaler efter varandra (2011, s. 141). Den här indelningen i episoder går att anpassa väldigt bra till mitt fall, eftersom det i kommentarsfälten uppstår små diskussioner eller gemensamma problemlösningar som har ett tydligt tema och skiljer sig från resten av kommentarerna. Den episodliknande strukturen förstärks också av att de som kommenterar kan skriva sina kommentarer som svar på andra kommentarer.

I mitt fall är det inte lika aktuellt att göra en kronologisk genomgång, eftersom deltagarna i ett kommentarsfält är olika vid olika tidpunkter och jag dessutom analyserar flera olika kommentarsfält. I stället delar jag upp mitt arbete i en första fas, där jag studerar varje video och kommentarsfält en i taget, samtidigt som jag utvecklar min teori, och en andra fas, där jag jämför videorna med varandra och återvänder till de enskilda episoderna ur ett mer övergripande perspektiv.

5.1 Val av kategorier som resultat av den konstanta jämförelsemetoden

Resultatet av den här processen blev att jag valde att analysera materialet efter delvis andra samförståndsdomäner eller matematiska diskurser, jämfört med de samförståndsdomäner som Richard (1991) och Yackel och Cobb (1996) talar om. Likt Richards (1991) använder jag begreppen *samförståndsdomän* och *matematisk diskurs* mer eller mindre synonymt. Medan Richards framför allt använder begreppet samförståndsdomän för att kategorisera och analysera matematisk interaktion i olika sammanhang (skolmatematik, tidskriftsmatematik, forskningsmatematik), så fokuserar min klassifikation av samförståndsdomäner tydligare på det matematiska innehållet. Jag fann detta vara nödvändigt för att kunna göra en någorlunda klar klassifikation av de korta replikväxlingar som jag arbetar med.

Min klassifikation utgår i grova drag från två olika dimensioner: aritmetik / algebra och objektsmatematik / symbolmatematik. Dessa två dimensioner blir särskilt tydliga när det gäller ekvationslösning, som är temat för mina videor. Det finns mycket forskning om skillnaden på aritmetiska och algebraiska tänkesätt och språk (se till exempel Filloy & Rojano 1989 eller Herscovics & Linchevski 1994). En viktig skillnad mellan aritmetik och algebra är förhållandet till de symboler som beskriver matematiska operationer. Inom aritmetiken förväntas deltagarna utföra operationer som uttrycks med operationssymboler på tal som uttrycks med siffror. Inom algebran utför däremot deltagarna operationer som inte beskrivs med några symboler på uttryck som är sammansatta av siffror, operationssymboler och relationssymboler. Det handlar tydligt om skilda praktiker och diskurser även om man inte brukar tala om det i dessa termer.

Symbolmatematik och objektsmatematik är min beteckning för den tydligaste skillnaden mellan hur matematiken (till skillnad från inställningen till matematiken eller synen på målet med matematiken) förstås i en skolmatematisk respektive en undersökande diskurs, enligt Yackels och Cobbs (1996) beskrivning. De kopplar skolmatematiken till en syn på matematik som operationer på symboler och uttryck, och den undersökande matematiken till en syn på matematik som operationer eller handlingar på matematiska objekt som står i relationer till varandra. Jag kommer att beskriva de två dimensionerna aritmetik / algebra och symbolmatematik / objektsmatematik mer utförligt i samband med redovisningen av mina resultat.

5.2 Val av material

Med urvalet av videor och kommentarsfält ville jag uppfylla flera olika målsättningar. För det första är det viktigt att kommentarsfälten innehåller tillräckligt många kommentarer, så att det går att hitta flera belysande episoder och dra slutsatser om den matematiska aktiviteten i kommentarsfältet som helhet. Samtidigt ville jag inte ha ett alltför stort och svåranalyserat material. Dessa överväganden ledde till att jag valde ett fåtal videor där var och en har ett stort antal visningar och kommentarer.

Eftersom min studie fokuserar på matematikkultur ville jag välja matematiska ämnen där skillnaden mellan en skolmatematikdiskurs och en undersökande matematikdiskurs är tydlig och gärna i viss mån har studerats tidigare. Det tema jag valde, linjära ekvationer, är lämpligt eftersom det dels är bland den första matematik som skolelever lär sig som kräver att de utför serier av algebraiska operationer, och dels eftersom de förutsätter förmågan att arbeta med abstrakta matematiska objekt och relationer. Det här förhållningssättet till matematiken är enligt Cobb et al. (2011) en viktig del av undersökande matematiska praktiker. I fallet med linjära ekvationer handlar det om relationen att vara lika med. I forskningen gör man ofta en skillnad på en operativ (operational) och en relativ (relational) förståelse av lika med-tecknet (Kieran 1981, Rittle-Johnson & Alibali 1999). I den operativa förståelsen tillkännager lika med-tecknet ett resultat, och i den relationella förståelsen betecknar det likhetsrelationen. Elever som förstår lika med-tecknet relationellt är bättre på att lösa ekvationer (Knuth, Stevens, McNeil & Alibali 2006).

5.3 Sammanställning, lagring och redovisning av data

Efter att jag valt ut videorna bygger jag upp en databas (jämför van de Sande 2011 s. 60), där jag ordnar de olika episoderna efter de kommentarsfält där de förekommer och beskriver deras innehåll. I linje med Glasers och Strauss metod utvecklar jag efter hand min terminologi och finner nya praktiker och normer som jag förde in i beskrivningen av de enskilda episoderna. I slutet av processen sammanställer jag sedan en lista över de begrepp jag använt mig av, och går tillbaka till de episoder jag analyserat tidigare för att se om det fanns någonting att tillägga. Detta ligger sedan till grund för den andra fasen, där jag analyserar allmänna tendenser och väljer ut särskilda episoder för att illustrera dem.

Kommentarsfälten till en Youtubevideo förändras ständigt, men för forskningsändamål är det viktigt att ha ett källmaterial som föreligger i statisk form. I en studie av ett klassrum handlar det om videoupptagningar och anteckningar under en bestämd tidsperiod. I mitt fall handlar det om den ursprungliga videon, och om kommentarerna fram till en viss punkt i tiden. Det är ett brott mot Youtubes användarvillkor att ladda ned Youtubevideorna, men eftersom de i princip inte förändras efter att de laddats upp var det inga problem för mig att enbart titta på dem på Youtube.

Däremot skapade jag statiska kopior av kommentarsfälten vid en viss punkt i tiden. Det här är inte ett upphovsrättsligt problem, eftersom man har rätt att kopiera data ur databaser (Youtubes databas över kommentarerna) i forskningssyfte, och eftersom kommentarerna till skillnad från videorna saknar verkshöjd. För att skapa de statiska kopiorna använde jag mig av Philip Klostermanns webbklient http://ytcomments.klostermann.ca/. Den sparar alla kommentarer till den valda Youtubevideon i formatet JSON (Java Script Object Notation). För att läsa kommentarerna använde jag mig sedan av webbtjänsten https://codebeautify.org/jsonviewer, som visualiserar JSON-filer på ett lättläst sätt.

När det gäller redovisningen av data i texten har jag valt att reproducera yttranden och matematiska uttryck på ett sätt som i så hög grad som möjligt liknar hur de förekommer i videorna och kommentarsfälten. Av den här anledningen citerar jag matematiska uttryck i videorna, där de oftast skrivs för hand och till exempel innehåller horisontella bråkstreck, med hjälp av formeluttryck i ordbehandlingsprogrammet, medan jag citerar matematiska uttryck i kommentarerna i löpande text på samma sätt som de är skrivna. På det här sättet blir det lättare för läsaren att förstå deltagarnas svar till varandra. Det blir också möjligt att föra resonemang om hur uttryckssättet påverkar förståelsen. Samtidigt kan de citerade kommentarerna vara lite svårlästa, vilket jag hoppas att läsaren har överseende med.

I texten förekommer direkta citat ur kommentarerna i min egen översättning, medan jag har lagt originalcitaten i en bilaga. Varje citatöversättning i texten avslutas med ett ordningsnummer i hakparentes, till exempel [1], som kopplar översättningen till originalcitatet i bilagan.

5.4 Forskningsetiska aspekter

Den som studerar människor har moraliska förpliktelser gentemot de människor som studeras. Det handlar både om en pliktetisk förpliktelse att be om deltagarnas medgivande till bestämda handlingar, och en konsekvensetisk förpliktelse att undvika att de tar skada. Liksom Eysenbach och Till (2001) framhäver bör forskaren inte glömma att tänka över de etiska frågeställningarna bara för att de sociala situationer som uppstår på internet är enkelt tillgängliga. Det är snarare så att forskning om människor på internet kräver mer eftertanke, eftersom det finns många platser eller gemenskaper på internet som varken är klart offentliga eller klart privata.

I allmänhet bör forskaren be deltagarna om deras medgivande till deltagande och publicering om han eller hon studerar deras handlingar eller yttranden i ett sammanhang som de uppfattar som privat. På internet uppfattas i allmänhet mindre och slutnare grupper som privata, och större och öppnare grupper som offentliga (Eysenbach & Till 2001). Till exempel uppfattas mejllistor för människor med svåra sjukdomar som privata sammanhang, och kommentarsfälten till tidningsartiklar som offentliga sammanhang.

Kommentarsfälten till Youtubevideor tillhör de största och mest öppna gemenskaperna på internet. De flesta av de filmer jag studerar har runt en miljon visningar, och även om många inte läser kommentarerna är antalet läsare fortfarande mycket stort. Kommentarsfälten är omedelbart tillgängliga för alla med en internetuppkoppling, det krävs ingen registrering eller inloggning. Den som skriver en kommentar till en Youtubevideo förväntar sig rimligen att vem som helst i hela världen kan ta del av den.

Samtidigt kan identiteten hos den som kommenterar vara privat även om kommentaren är offentlig. De flesta av dem som kommenterar en Youtubevideo gör det under en Youtubeidentitet, namnet på en av deras Youtubekanaler. Den här identiteten är oftast en pseudonym, och går inte att koppla till en verklig person eftersom ingen annan information än pseudonymen är offentlig. Till exempel går det inte att se en Youtubeanvändares epostadress. Men det finns också personer som kommenterar under sina verkliga namn. Oftast rör det sig om namnet kopplat till kommentatorns Google-konto, vilket är standard för den som inte har skapat en Youtubekanal. I den meningen är Youtubes kommentarsfält en offentlig miljö, jämförbar med insändarsidan i en tidning.

I och med att deltagarna är medvetna om att deras kommentarer kan läsas av vem som helst och kopplas till det namn som de publiceras under gör jag bedömningen att min studie inte kräver informerat samtycke. van de Sande (2011) gör samma bedömning, trots att miljön hon studerar är lite mer sluten. Hon väljer dock att använda egna pseudonymer i stället för deltagarnas användarnamn. Det här ökar graden av anonymitet endast marginellt, eftersom hon också ger direkta citat som enkelt går att koppla till det verkliga användarnamnet genom en sökmotor (se Eysenbach & Till 2001 s. 1105). Att använda direkta citat är viktigt i den här formen av studier, eftersom sättet deltagarna uttrycker sig på är ett viktigt studieobjekt.

Det är svårt att tänka sig att min studie skulle kunna skada deltagarna. Eysenbach och Till menar att en studie framför allt kan skada deltagarna genom att den inkräktar på deras privatliv eller stör samlivet i deras gemenskap. Till exempel kan deltagarna i en mejllista för människor med en svår sjukdom känna sig illa till mods om de vet att forskare som inte själva är sjuka läser vad de skriver till varandra. Det finns inte någon motsvarande risk när det gäller kommentarerna till matematikdidaktiska videor, eftersom kommentarer med matematiskt innehåll inte är ett särskilt känsligt ämne och gruppen i vilken fall är väldigt öppen. Dessutom fokuserar jag på de kommentarer som har ett matematiskt innehåll snarare än på kommentarer av mer personlig karaktär.

Sammantaget gör jag bedömningen att jag kan använda deltagarnas användarnamn och ge direkta citat. Jag kommer att ge översättningar av citaten i texten, och dessutom redovisa originalcitaten i en bilaga i slutet av texten. Detta innebär att Youtubeanvändarna i min studie går att identifiera. Dock går Youtubeanvändarna endast att koppla till verkliga personer i de fall som de har valt att publicera sina kommentarer under eget namn.

6 Resultat och analys

6.1 Översiktlig beskrivning av videorna

Youtube är en internettjänst som låter användarna publicera videor och skriva kommentarer. Videorna är fritt tillgängliga för människor i hela världen, och driften av tjänsten finansieras huvudsakligen genom reklam. En användare som publicerar en video gör det inom ramen för en kanal, som blir hans eller hennes Youtubeidentitet. De användare som har en kanal kommenterar vanligtvis också andras videor under kanalens namn, medan användare som själva inte har en kanal i allmänhet använder sin Googleidentitet. Kommentarerna kan skrivas som kommentarer till videon eller som svar till andra kommentarer. Däremot går det inte att skriva kommentarer som organiseras som svar till svar. I dessa fall inleder användarna vanligtvis sitt inlägg med texten "+[användarnamn]" för att visa vilken kommentar de svarar på.

De tio videorna i den här undersökningen kommer alla från kanaler med ett stort antal videor, från några tiotal till några hundratal. Bland alla videor om lösning av linjära ekvationer tillhör videorna i undersökningen dem som har störst antal visningar, från omkring 700 000 till drygt 2 000 000. Det är dock bara en liten del av dem som tittar på videorna som skriver kommentarer. Mina videor har mellan cirka 300 och 1200 kommentarer, vilket innebär att det går mellan cirka 700 och 5000 visningar på varje kommentar. Ungefär en femtedel av kommentarerna handlar om matematiken. Resten handlar bland annat om kommentatorernas förestående prov i skolan, och om hur bra videons upphovsman är i förhållande till deras ordinarie lärare.

Det finns inte så mycket information om vem som står bakom videorna. Kanalerna aprendópolis, Jorge Cogollo och mathantics tillhör alla små företag som ägnar sig åt matematikundervisning online. Khan Academy är en stiftelse som erbjuder gratis undervisningsmaterial framför allt i matematik och naturvetenskap. Alla fyra har också egna hemsidor, som finns länkade från Youtubesidan. De flesta har korta presentationer där det framgår att deras mål är att erbjuda fler människor god matematikundervisning. Den ska vara klar och lättfattlig (aprendópolis), eller rolig (mathantics). På flera av hemsidorna finns det resonemang om hur många skolelever har svårt med matematiken, men att alla kan lära sig. Den okände upphovsmannen till kanalen tecmath skriver i sin korta presentation att han eller hon har specialiserat sig på matematiktrick för snabba resultat.

Videorna i undersökningen har i allmänhet publicerats några år före undersökningstillfället. Den äldsta videon, *Algebra: Linear Equations 1*, publicerades i november 2006, och den yngsta videon, *Ecuaciones Lineales*, publicerades i december 2013. Kommentarerna har skrivits utspritt över tiden mellan videons publicering och tiden för min undersökning. De kommentarer som är svar till andra kommentarer har dock oftast skrivits förhållandevis nära tiden för den ursprungliga kommentarens publicering, mellan ett par dagar och ett par månader därefter. Det här beror förmodligen på att algoritmen som avgör i vilken ordning kommentarerna kommer upp under videon tar hänsyn till hur nya kommentarerna är. På sätt och vis kan man alltså se kommentarsfältet som en logg över olika samtal som förts om samma tema.

I tabell 2 finns grundläggande fakta om de tio videor som är föremål för min undersökning.

Namn	Kanal	Antal visningar	Antal kommentarer
Ecuaciones de primer grado	aprendópolis	2049441	1529
ECUACIONES LINEALES - Ejercicios Resueltos Paso a Paso	Jorge Cogollo	1236262	410
Algebra: Linear Equations 1	Khan Academy	1655696	607
Solving a more complicated equation	Khan Academy	1652719	232
Introduction to solving an equation with variables on both sides	Khan Academy	1807380	330
Algebra: Linear equations 4	Khan Academy	1130865	298
Algebra Basics: Solving Basic Equations Part 1	mathantics	1016743	1221
Algebra Basics: Solving Basic Equations Part 2	mathantics	794422	1137
Algebra Shortcut Trick - how to solve equations instantly	tecmath	1739658	1874
Algebra Shortcut Trick - how to solve equations instantly (2)	tecmath	623518	687

Tabell 2, Grundläggande fakta om de undersökta videorna

6.2 Matematikdiskurser i videor och kommentarsfält

Det första steget i min undersökning är att beskriva de matematikdiskurser som uppträder i videorna och kommentarsfälten. Det handlar alltså om att beskriva de betydande trosföreställningar om den matematiska aktiviteten som deltagare och grupper av deltagare tar för delade. Till en början kommer jag inte att använda mig så mycket av begreppen skolmatematik eller undersökande matematik, utan i linje med Glasers och Strauss (1967) metod vill jag först fokusera på att beskriva de viktigaste trosföreställningarna exakt, med den mest passande typologin. Jag har identifierat tre viktiga dimensioner av matematikdiskurserna i kommentarsfältet, som jag kommer att beskriva mer noggrant i resten av avsnittet. Det handlar för det första om normen att matematiken har entydiga och konsekventa regler för vilka operationer som är tillåtna, för det andra om ett aritmetiskt respektive algebraiskt förhållningssätt till matematiken, och för det tredje om en förståelse av matematisk praktik som å ena sidan handlingar på symboler eller å andra sidan som handlingar på matematiska objekt i matematiska relationer.

6.2.1 Matematiken styrs av regler

Nästan alla deltagare i kommentarsfälten verkar anta att matematik styrs av regler med ett bestämt och någorlunda väldefinierat innehåll. Att matematiken styrs av regler innebär att motsägelser mellan reglerna måste lösas, och att det i de flesta fall går att komma fram till entydiga svar på matematiska frågeställningar. Den här principen är grunden för matematiken som en normativ aktivitet. Den är också en viktig katalysator de matematiska frågeställningar som uppkommer när olika regler tycks motsäga varandra.

De flesta kommentatorer har med sig den underförstådda normen att ekvationslösning liksom andra matematiska praktiker sker efter bestämda regler. Många kommentarer uttrycker en önskan efter att förstå den regel som en viss handling följer. I kommentarsfälten till videorna om linjära ekvationer handlar det ofta om förkortning, multiplicering med den multiplikativa inversen eller om regler för att "flytta" termer mellan ekvationens led.. Många frågar varför ett tal förvandlas till ett annat tal: "Varför blev [talet] 4 [talet] 1 och [talet] 40 [talet] 10?"[1].

Men det finns också en och annan kommentatorer som uttrycker tvivel på att matematisk aktivitet faktiskt följer regler. De förstår inte varför videornas upphovsmän gör en sak och inte en annan. Till exempel skriver signaturen Lilandriel, med referens till en del av en video där upphovsmannen skriver alla termer som bråk med nämnaren 1 innan han multiplicerar med en faktor, "Kan någon förklara varför han använde x+1/1? jag förstår biten om x+1, men varför 1-an? varför inte x+1/2? Eller till och med 3? en av anledningarna till att matte stör mig är att jag bara inte fattar den sortens godtyckliga beslut, och det är verkligen frustrerande"[2].

När reglerna inte finns försöker deltagarna hitta dem, antingen genom att fråga upphovsmannen eller genom att själva tänka ut dem. En kommentator till videon *Algebra: Linear Equations 1* skriver "Jag uppskattar det arbete du lagt ned men istället för att lära ut reglerna och metoderna. Du har bara löst ekvationen utan att säga vilken regel man ska använda"[3]. Det här inlägget har 15 likes, vilket är ovanligt många. Vi kommer att se exempel på hur deltagare själva skapar regler senare i den del av det här avsnittet som handlar om lärande.

6.2.2 Aritmetik och algebra

Att lösa linjära ekvationer är en algebraisk praktik. Liksom andra algebraiska praktiker skiljer den sig från aritmetiken – den matematiska praktik som högstadie- och gymnasieelever i allmänhet är mest vana vid – på flera avgörande sätt. För det första handlar algebran på en formell nivå till skillnad från aritmetiken om att hantera mer eller mindre komplexa matematiska uttryck, i stället för att enbart hantera siffror. De här matematiska uttrycken består av olika matematiska symboler, som fungerar på olika sätt: variabler, konstanter, koefficienter, operationssymboler och relationssymboler.

De matematiska symbolernas funktion inom algebran sedd som en matematisk praktik och som en matematikdiskurs skiljer sig ganska kraftigt från deras funktion inom aritmetiken, såsom den förstås av eleverna. Enligt många elevers förståelse av aritmetiken beskriver operationssymbolerna de handlingar som deltagarna i praktiken förväntas utföra, och lika med-tecknet markerar resultatet av operationen.(Kieran 1981, Knuth et al. 2006) Till exempel tänker sig en deltagare som ser teckenkombinationen 5+7= att han eller hon ska utföra additionen 5+7 och sedan skriva svaret 12 till höger om lika med-tecknet.

Inom algebran skiljer sig däremot de handlingar som utförs inom ramen för aktiviteten från de operationer som operationssymbolerna beskriver. Till exempel kan det handla om att förkorta uttrycket $\frac{6a^2}{3a}$med den minsta gemensamma nämnaren eller att faktorisera uttrycket $4 + 8x$. Lika med-tecknets funktion är också annorlunda, i och med att deltagarna förväntas göra operationer på uttryck på båda sidor om lika med-tecknet, och i vissa fall utföra särskilda handlingar som har att göra med tecknet. Skillnaderna mellan de operationer som uttrycks genom de matematiska symbolerna och de operationer som deltagarna förväntas utföra är särskilt tydliga när det gäller ekvationer, eftersom handlingarna som deltagarna förväntas utföra på ekvationen inte uttrycks explicit.

De flesta av videorna uttrycker ett algebraiskt förhållningssätt till matematiken, vilket inte är förvånande eftersom ekvationslösning i vanliga fall är en form av algebra. Det finns dock ett intressant undantag, nämligen kanalen tecmaths två videor. Dessa videor, med de för många skolelever säkert lockande namnen Algebra Shortcut Trick och Algebra Shortcut Trick (2), presenterar ekvationslösning som om det handlar om att rekonstruera ett tal på vilket man har gjort en serie operationer, genom att applicera de omvända operationerna i omvänd ordning på resultatet. Matematiskt motsvaras detta av att mata in $f(x)$ i den inversa funktionen f^{-1}. Alla tecmaths exempel består av ett uttryck som innehåller en enda variabelterm på vänstra sidan om lika med-tecknet, och av en konstant på högra sidan om lika med-tecknet. Till exempel löses ekvationen $2x + 4 = 10$genom att man först skriver upp operationerna som gjorts på variabeln, alltså för det första multiplikation med 2 och för det andra addition med fyra, och sedan de omvända operationerna i omvänd ordning, alltså för det första subtraktion med fyra och för det andra division med 2. Dessa operationer utförs sedan på resultatet (högerledet), så att vi får $10 - 4 = 6$och $6/2 = 3$, det vill säga $x = 3$. Den som använder den här metoden läser alltså ekvationen som en uträkning, där lika med-tecknet används för att kungöra resultatet. Begränsningen hos den här metoden är att den bara fungerar på ekvationer med en enda okänd term, på den ena sidan om likhetstecknet.

Det aritmetiska förhållningssättet uppträder också i en del av kommentarerna till de andra videorna. På den mest grundläggande nivån visar det sig i en oförståelse för de matematiska symbolernas funktion inom ramen för den algebraiska praktiken. Till exempel frågar signaturen Angie i kommentarsfältet till videon *Ecuaciones Lineales* "Och hur får du tag på dina = alltså i ekvationen x+7=28, var i helvete fick du 28 ifrån, förklara det"[4]. Signaturen Karen Mena frågar "varför är x+7-7 lika med 28"[5]. Angies kommentar har fem likes, Karen Menas har tre, och det finns fler liknande kommentarer till videon. Dessa kommentatorer tänker sig uppenbarligen att "x+7=28" visar resultatet av en beräkning som videons upphovsman utfört, och förstår inte hur det går att beräkna x+7. Knuth et al. (2006, s. 301) som skriver om ekvationslösning kallar detta för en operationsförståelse (operational understanding) av ekvationen.

Ett annat exempel är förkortning av bråk. Bråk är bland de första matematiska uttryck som skolelever träffar på där ett tecken för en matematisk operation (divisionstecknet, bråkstrecket) inte ska ses som en uppmaning till handling. De ska förkorta eller förlänga bråket utan att utföra divisionsoperationen. En del kommentatorer är oförstående inför sådana här operationer där man ändrar siffrorna i stället för att skriva nya efter ett likhetstecken. "Varför ändrar du talen hela tiden?"[6] undrar en kommentator till videon *Algebra: Linear Equations 1*. Flera andra vill veta varför specifika siffror i specifika ekvationer i filmen förvandlas till andra siffror. Kommentatorn Sedric Suringa skriver "varför förvandlas 6 till 2 och 21 till 7?"[7]

Ett exempel på ett lite mer avancerat aritmetiskt förhållningssätt är att göra operationer på siffror i stället för att göra operationer på kombinationer av siffror och operationssymboler. Flera deltagare i kommentarsfältet till videon *Algebra: Linear Equations 1* tänker sig att inversen, alltså det tal som skall adderas till en sida eller multipliceras med en term för att invertera en operation på ekvationens okända variabel, beror av huruvida termen är ett heltal eller ett bråk, snarare än av den operation som binder termen till den okända variabeln.

Flertalet kommentatorer befinner sig dock i en algebraisk samförståndsdomän. Till exempel svarar flera kommentarorer signaturen Angie och förklarar på olika sätt vad ekvationslösning går ut på, ur ett algebraiskt perspektiv. Till exempel skriver användaren Andres Sanchez "i det som du skriver har man ställt upp en linjär ekvation, det vill säga att [i ekvationen] x+7=28 är det som du måste hitta värdet av x, i det här fallet genom att samla termer, variabler på en sida av =-tecknet, heltal på den andra sidan"[8]. De flesta kommentatorer till videorna ställer också frågor som förutsätter ett aritmetiskt förhållningssätt, till exempel användaren William Mahmoods fråga under videon *Algebra Basics* om vad som händer om man löser en given ekvation genom att subtrahera med variabeln på båda sidor i stället för med konstanten.

6.2.3 Symbolmatematik och objektsmatematik

Liksom när det gäller många andra matematiska praktiker går det att se ekvationslösning både som en manipulation av symboler och handlingar på matematiska objekt. Den här skillnaden är en av de viktigaste mellan det som Richards (1991) och Yackel och Cobb (1996) kallar skolmatematik och det som de kallar undersökande matematik. Målet för den skolmatematiska praktiken är att utföra framgångsrika manipulationer av matematiska symboler, medan den undersökande matematiken i hög grad handlar om att förstå de objekt och relationer som symbolerna refererar till. Jag kallar dessa två samförståndsdomäner för symbolmatematik och objektsmatematik.

Det finns olika sätt att tala om ekvationslösning som hör till de olika samförståndsdomänerna. En i undervisningen vanlig diskurs är att ekvationslösning handlar om att "flytta" termer mellan lika med-tecknets två sidor . Problemet i ekvationen är att den okända variabeln inte är ensam på ena sidan av lika med-tecknet, och därför måste de andra symbolerna flyttas efter bestämda regler. Lika med-tecknet har inte betydelse genom att det uttrycker en relation, utan endast genom att det definierar ekvationens två sidor och därmed är en förutsättning för överflyttningsoperationerna (Knuth et al. 2006).

Bland de videor jag har studerat finns det bara en som tydligt presenterar ekvationslösning som att flytta över termer, Ecuaciones de primer grado från kanalen Aprendópolis. Lika med-tecknet jämförs (minut 3:05) med en "barriär", sådan att ekvationens termer när de rör sig över barriären associeras med den motsatta operationen. Till exempel förvandlas $+5$ i ekvationen $x + 5 = 9$ till -5 när termen flyttas över till ekvationens högra sida. Den här förklaringen ligger uppenbarligen inom den symbolmatematiska samförståndsdomänen, där matematik ses som operationer på uttryck, snarare än som operationer på matematiska objekt i relationer till varandra.

Ett annat sätt att tala om ekvationslösning är att fokusera på att göra samma sak på båda sidor. Om detta dessutom motiveras med att lika med-tecknet betyder att de kvantiteter som står på den vänstra sidan är lika med de kvantiteter som står på den högra sidan, så sker ekvationslösningen inom en objektsmatematisk samförståndsdomän. Det tydligaste exemplet på den här metoden bland filmerna jag studerat är *Solving Basic Equations* från kanalen Math Antics. I videon jämförs en ekvation med en balansvåg i jämvikt. Inom ramen för den här analogin motsvarar den okända variabeln en vikt vars massa är okänd. Att få den okända variabeln ensam på ena sidan av ekvationen motsvarar att ta bort och lägga till vikter på ett sådant sätt att en vikt med okänd massa hamnar i den ena vågskålen och enbart vikter med känd massa hamnar i den andra, på ett sådant sätt att jämvikten hela tiden bevaras. Videons upphovsman understryker alltså att lika med-tecknet motsvarar en verklig ekvivalensrelation.

Bland de andra videorna presenterar de flesta också en metod som går ut på att göra samma operationer på båda sidor av ekvationen, men kopplingen till lika med-tecknets betydelse är inte alltid explicit. Till exempel säger upphovsmannen till videon *Algebra: Linear Equations 1* att han ska presentera ett systematiskt sätt att få x ensamt, nämligen att göra samma operationer på båda sidor. Eftersom den matematiska betydelsen hos dessa operationer inte framgår, ligger det närmare till hands att klassificera diskursen i filmen som symbolmatematik än som objektsmatematik.

Ett symbolmatematiskt förhållningssätt är vanligare i kommentarsfälten än i själva filmerna. Det visar sig oftast i att deltagarna antar att uttryck som skrivs på olika sätt också är matematiskt olika (jämför Yackel & Cobb 1996 om matematisk olikhet), eller i att de diskuterar vilka regler man bör följa utan att diskutera deras förhållande till matematiska objekt. Det är också vanligare i kommentarsfälten till de spanskspråkiga filmerna än till de engelskspråkiga filmerna. De kommentatorer till engelskspråkiga filmer som talar om att "flytta över" kommer oftast inte från engelskspråkiga länder.

Ett särskilt intressant fall är filmen *Ecuaciones lineales*, som presenterar ekvationslösning utifrån ett objektsmatematiskt förhållningssätt men vars kommentarsfält är fullt av kommentarer från personer som är vana vid en symbolmatematisk diskurs. En del av dessa kommentarer är skrivna utifrån den symbolmatematiska diskursen utan att sätta den i relation till videons objektsmatematiska diskurs, medan andra kommentarer handlar om skillnaden mellan diskurserna. Ett exempel på det första är användaren Rocio Maldonados kommentar, där hon frågar varför ett tal inte byter tecken när det "flyttas över till andra sidan av likheten"[9], om det rör sig om multiplikation eller division. De flesta av kommentarerna i den andra kategorin uttrycker oförståelse inför den metod där man gör samma operationer på båda sidor, eftersom den går långsammare. Men det finns också deltagare som försvarar den här metoden och det objektsmatematiska synsättet, med motiveringen att det är viktigt att förstå vad man gör.

6.2.4 Klassifikation av videor efter deras samförståndsdomäner

Med hjälp av kategorierna aritmetisk / algebraisk och symbolmatematik / objektsmatematik går det att klassificera videorna efter deras samförståndsdomäner. Resultaten återfinns i tabell 3.

Namn	Kanal	Samförståndsdomän
Ecuaciones de primer grado	aprendópolis	Algebraisk och symbolmatematisk
ECUACIONES LINEALES - Ejercicios Resueltos Paso a Paso	Jorge Cogollo	Algebraisk och objektsmatematisk
Algebra: Linear Equations 1	Khan Academy	Algebraisk och symbolmatematisk
Solving a more complicated equation	Khan Academy	Algebraisk och symbolmatematisk
Introduction to solving an equation with variables on both sides	Khan Academy	Algebraisk och symbolmatematisk
Algebra: Linear equations 4	Khan Academy	Algebraisk och symbolmatematisk
Algebra Basics: Solving Basic Equations Part 1	mathantics	Algebraisk och objektsmatematisk

Algebra Basics: Solving Basic Equations Part 2	mathantics	Algebraisk och objektsmatematisk
Algebra Shortcut Trick - how to solve equations instantly	tecmath	Aritmetisk och objektsmatematisk
Algebra Shortcut Trick - how to solve equations instantly (2)	tecmath	Aritmetisk och objektsmatematisk

Tabell 3, Samförståndsdomäner i de undersökta videorna

6.3 Förståelse och lärande i kommentarsfältens dialoger

Utifrån de här samförståndsdomänerna går det att analysera diskussionerna i kommentarsfälten. Till skillnad från när jag beskrev domänerna kommer jag att begränsa mig till diskussioner, alltså dialoger som består av två eller flera inlägg. Jag gör det här valet dels eftersom det är svårt att bedöma vilka effekter mötet mellan olika diskurser har utifrån en enskild kommentar, och dels eftersom materialet annars skulle bli för stort och svårt att arbeta med.

För att få en översiktlig bild av hur dialogerna ser ut och vad som händer i dem klassificerade jag dem grovt efter vilka samförståndsdomäner som deltagarna kommer från, och efter huruvida någon eller några deltagare uttrycker förståelse eller oförståelse vid slutet av deras deltagande i dialogen. Klassificeringen utgick från två olika par eller dimensioner hos samförståndsdomänerna, å ena sidan dimensionen aritmetik / algebra och å andra sidan dimensionen symbolmatematik / objektsmatematik. I vissa av dialogerna gick det bara att identifiera samförståndsdomäner med kännetecken från en av dimensionerna, och i andra gick det att identifiera samförståndsdomäner i båda dimensionerna. I det senare fallet fick dialogen två separata poster i statistiken, en under vardera dimension. Om deltagarna både uttryckte förståelse och oförståelse fick dialogen också två separata poster, en för varje uttryck.

Resultaten av undersökningen framgår av tabellerna 4 och 5.

Diskurs (samförståndsdomän)	Antal dialoger	Oförståelse	Okänt / oklart	Förståelse
Enbart aritmetisk	5	1	2	2
Aritmetisk och algebraisk	30	4	15	11
Enbart algebraisk	19	0	8	11
Enbart symbolmatematik	15	0	9	6
Symbolmatematik och objektsmatematik	15	4	8	3
Enbart objektsmatematik	1	0	0	1
Totalt	85	9	42	34

Tabell 4, Uttryckt förståelse efter samförståndsdomän eller kombination av samförståndsdomäner

Mittuniversitetet
MID SWEDEN UNIVERSITY

Diskurs (samförstånds-domän)	Antal dialoger	Oförståelse	Okänt / oklart	Förståelse
En enda	40	1	19	20
Två olika	45	8	23	14

Tabell 5, Uttryckt förståelse efter samförståndsdomän, en enda eller två olika

Som vi kan se kan deltagare uttrycka förståelse också när de verkar vara vana vid ganska djupt skilda matematiska diskurser. Däremot är det vanligare att de uttrycker oförståelse. Men den här översiktliga undersökningen ger anledning till ytterligare frågor. Varför uppträder förståelse i vissa fall men inte i andra? Vilken sorts förståelse rör det sig om i de olika fallen? Vilka begränsningar finns det i de förklaringar som deltagarna accepterar, och i vilken mån innebär den förståelse som deltagarna uttrycker verkligt lärande? I resten av det här avsnittet kommer jag att redogöra för allmänna karakteristika hos kategorierna i tabellen, och dessutom för några särskilt intressanta fall mer i detalj.

6.3.1 Dialoger där deltagarna uttrycker oförståelse

De dialoger där deltagarna uttrycker oförståelse ser i allmänhet ut på två sätt: å ena sidan finns det fall där deltagarna misslyckas med att förklara eller förstå en konflikt mellan normerna i olika samförståndsdomäner, och å andra sidan finns det fall där deltagare inte verkar förstå poängen med det synsätt som förs fram av någon som kommer från en annan samförståndsdomän än den egna. Den första typen av dialoger finns huvudsakligen i skärningspunkten mellan aritmetik och algebra, och den andra typen av dialoger i skärningspunkten mellan symbolmatematik och objektsmatematik.

Ett exempel på dialoger i skärningspunkten mellan aritmetik och algebra kommer från kommentarsfältet till videon *Ecuaciones del primer grado*, där användaren Edgar frågar varför man säger att en term i en av videons exempelekvationer ”adderas” när den inte har ett plustecken. Den här kommentaren har 13 likes, vilket torde innebära att många delar Edgars oförståelse. De verkar inte förstå inte den algebraiska konventionen att tala om termer som “adderas” och “subtraheras” för att avgöra vad som händer med termerna när man flyttar över dem till andra sidan. Snarare är de förmodligen vana vid aritmetiska praktiker där man endast utför de operationer som indikeras av operationssymbolen. Videons upphovsman svarar på kommentaren och försöker förklara genom att hänvisa till algebraiska operationer och negativa tal, men Edgar återkommer inte och andra användare skriver att de inte förstår.

Flera exempel på den andra typen av dialoger kommer från videon *Ecuaciones lineales*, där många av kommentatorerna anser att det är meningslöst att göra samma operationer på båda sidor, när det går snabbare att flytta över termer. Trots att det i dessa dialoger då och då finns deltagare som poängterar vikten av att förstå betydelsen av det man gör, så uttrycker de flesta av svaren till dessa kommentarer enighet med dem som inte ser poängen med det objektsmatematiska förhållningssättet.

Ett intressant exempel på oförståelse i samband med både dimensionen aritmetik / algebra och dimensionen symbol / objekt ges av en kort dialog i kommentarsfältet till videon *Solving more complicated equations*. Signaturen Aiphiae ser en konflikt mellan operationer på ekvationer (lägga till, ta bort o s v) och prioriteringsreglerna (räkneordningen). Han eller hon ger ekvationen "3x+5=17" som exempel, och menar att den kan lösas på två sätt. Det första är att först subtrahera 5 från båda sidor och sedan dividera båda sidor med 3, alltså att göra en operation som inte följer räkneordningen (multiplikation och division före addition och subtraktion). Den här varianten ger enligt Aiphiae följande lösning av ekvationen:

3x+5=17

3x=12

x=4

Den andra varianten är att först dividera och sedan subtrahera, vilket enligt Aiphiae skulle vara i enlighet med räkneordningen. Den här varianten ger enligt Aiphiae lösningen

3x+5=17

3x+5-5/3=17-5/3

x=15.3333

Misstaget Aiphiae har gjort är att inte dela alla termer på vardera sida med 3, och det är därför som resultaten skiljer sig. Det här misstaget skulle kunna ha ett samband med att det inte finns något enkelt sätt att skriva horisontella bråkstreck på en dator, ett exempel på vad Borba (2005) kallar *internetmatematik*. Men tvivlen som Aiphiae har är av mer allmänt intresse: varför behöver man inte följa räkneordningen i valet av operationer att göra på båda sidor om lika med-tecknet? Hur vet man om ordningen i vilken man gör operationerna har betydelse eller ej? Aiphiae tvivlar inte på att det finns regler eller förklaringar, men väl på sin egen förmåga att hitta dem. Han eller hon avslutar sitt inlägg med "Jäkla matte. Det måste finnas en enkel förklaring till det här … Jag kan bara inte hitta det svar eller den regel som går att tillämpa på det här."[10]

Aiphiaes problem är intressant också eftersom det visar på en grundläggande dynamik i människors matematiska utveckling. Videons upphovsman och kanske också andra lärare och läromedel har visat metoder och regler för att göra matematik (å ena sidan räkneordningen, å andra sidan ekvationslösning), men dessa regler är inte entydiga och det är svårt att veta om de är i konflikt med varandra. Givet att det alltid finns eller måste finnas entydiga regler i matematik, liksom Aiphiae skriver och som vi har sett i förra avsnittet att många kommentatorer anser, så kräver situationen att regeln preciseras. Någon måste hänvisa till en ny regel, och om den regeln inte finns så måste den uppfinnas. I vårt fall är det enkelt att ge en ny regel – räkneordningen appliceras inte på valet av operationer i ekvationslösningen – men det väsentliga är att det hela tiden uppkommer situationer som leder till att reglerna eller procedurerna ifrågasätts. Man kan liksom Houssart (2001) se det som att sådana situationer skapar ett slags naturliga tendenser till undersökande matematik, till att ifrågasätta och att diskutera.

Aiphiae redovisar själv inga försök att ge en förklaring eller uppfinna en regel, men signaturen Tzar svarar Aiphiae med några egna tankegångar:

> Jag tror att det delvis handlar om logik. Jag har svårt att förstå det, men min hjärna ger en vink. Så 3x+5=17 betyder Det finns 3 uppsättningar av ett tal så att när de kombineras med 5 är de lika med 17, Det finns LIKA mycket på båda sidor. Vi vet bara inte vad det är, men symbolen har ett värde. Så när man tänker på det måste man tänka på hur att subtrahera med något påverkar hur det delas upp i olika delar, och när man dividerar något så gör det inte det. Så jag tror att det finns goda skäl för att det skulle vara mer logiskt att helt enkelt först subtrahera och sedan dividera det. Om du kommer på det kan du vara snäll att berätta för mig? För jag förstår tyvärr inte varför än, det får mig att känna mig inte smart.[11]

Det här är ett exempel på vad Richards (1991) kallar undersökande matematik. Tzar diskuterar meningen hos den matematiska symboliken och försöker förstå på vilket sätt som olika operationer påverkar matematiska objekt. Han eller hon ger också ett förslag på vilken egenskap hos de matematiska operationerna som skulle kunna ha betydelse för det fenomen som Aiphiae redogjort för. Det är lite svårt att förstå vad Tzar egentligen menar, men talet om hur division och subtraktion påverkar uppdelningen av något ligger inte långt ifrån den avgörande insikten att Aiphiae bara dividerat en del av hela mängden på ena sidan lika med-tecknet.

Dock saknar Tzar och Aiphiae själva åtminstone för tillfället förmågan att utveckla sina intuitioner till en tillfredsställande förklaring av problemet. Tzar avslutar sin kommentar med orden ”Om du kommer på det kan du vara snäll att berätta för mig? För jag förstår tyvärr inte varför än, det får mig att känna mig inte smart.”[11], och efter Tzars inlägg är det ingen mer som deltar i diskussionen.

6.3.2 Dialoger där deltagarna uttrycker förståelse

De dialoger där deltagarna uttrycker förståelse handlar till stor del om enkla frågor om vilka regler som gäller. Sådana här fall finns det gott om både i dialoger där deltagarna befinner sig i samma samförståndsdomän, och i fall där deltagarna befinner sig i olika samförståndsdomäner. Det kan handla om att man inte behandlar tecknet “x” som multiplikation utan som en variabel (aritmetik och algebra), om att det inte spelar någon roll med vilken term man subtraherar först på båda sidor (enbart algebra), eller om varför man inte flyttar över alla termerna samtidigt (enbart symbolmatematik).

Särskilt när det gäller deltagare i olika samförståndsdomäner handlar det mycket om att deltagare från en samförståndsdomän följer och förstår när deltagare från den andra samförståndsdomänen utför en viss matematisk operation. Till exempel har i kommentarsfältet till videon *Ecuaciones de primer grado* användarna mirmoz7 och Jennifer Strehmel en dispyt om den korrekta lösningen till en ekvation, tills Mirmoz7 sätter in Jennifer Strehmels resultat i ekvationen. När hon konfronteras med den här metoden verkar Jennifer Strehmel undersöka sin egen uträkning på nytt, eftersom hon sedan skriver att hon insett sitt misstag. Ett annat exempel är användaren DeansVideoClips, som i kommentarsfältet till videon *Ecuaciones Lineales* frågar hur han ska ställa upp ekvationer. Användaren Tsubasa Tsang ger ett utförligt svar. DeansVideoClips tackar Tsubasa Tsang och säger att han förstår bättre när han ser andra ställa upp dem men att det fortfarande är svårt för honom själv.

Men det finns också en del lite mer komplexa fall, där deltagarna i likhet med vad Tzar försökte göra konstruerar egna regler eller definitioner för fall som är oklara efter videons förklaringar. Detta händer enbart i dialoger där deltagarna befinner sig i samma samförståndsdomän. Ett första exempel kommer från kommentarsfältet till videon *Algebra: Linear Equations 1* och gäller inverser till tal. Upphovsmannen till videon löser exempelekvationen $\frac{-3x}{4} = \frac{10}{13}$, och multiplicerar $\frac{-3x}{4}$ med den multiplikativa inversen $\frac{-4}{3}$. Användaren Zaimah Begum-Diamond skriver att hon inte förstår vad inverser är, och frågar varför man använder sig av dem när man löser linjära ekvationer.

Signaturen Zelkrov svarar att inversen är "i princip motsatsen till ett tal"[12]. Han eller hon ger först ett par exempel med positiva heltal, vars inverser enligt honom eller henne är negativa heltal (till exempel är -14 inversen till 14). Sedan skriver han eller hon att det är annorlunda för bråk, där man för att hitta inversen byter plats på täljare och nämnare men inte byter tecken. zaimah tackar Zelkrov och skriver inte några fler inlägg, men signaturen TheAmazingWorld OfVidhi vill försäkra sig om att han eller hon förstått definitionen korrekt: "+Zelkrov så inversen är = ett tals negativa motsats"[13]. Zelkrov upprepar att det gäller för heltal, men att man inte byter tecken om det är ett bråk. TheAmazingWorld ofVidhi tackar och skriver att han eller hon har förstått.

Zelkrov har alltså föreslagit en regel som accepterats av åtminstone två andra användare. Kanske är de fler: hans eller hennes inlägg har också fyra likes, och förmodligen finns det fler som läst det. Hans eller hennes regel är en hybrid mellan att överta normer för matematiken från den gemenskap (community of practice) som Khan Academy representerar, och att konstruera en egen matematik separat från den etablerade matematiska gemenskapen. Zelkrov använder de exempel som Khan Academy ger som ett slags fall som ligger till grund för en induktion: vilken allmän regel förklarar exemplen bäst?

Samtidigt blir resultatet en inkorrekt definition, som skiljer sig från den definition som är allmänt accepterad inom den matematiska gemenskapen. Zelkrovs definition tar inte hänsyn till en väsentlig egenskap hos inverser, nämligen att de alltid är inverser under en viss operation. Den additiva inversen till ett tal a är det tal b som har egenskapen att $a + b = 0$, och den multiplikativa inversen till ett tal a är det tal b som har egenskapen att $a * b = 1$.

Det är intressant att jämföra med ett fall där den som har gjort videon deltar i diskussionen. Flera av dem som kommenterar videon *Ecuaciones de primer grado* undrar varför koefficienten, till exempel 3 i ekvationen $3x = 18$ eller 2 i ekvationen $2x = 10$, "flyttas över" utan att byta tecken, trots att de har lärt sig att man byter tecken när man flyttar över. I ett av fallen svarar videons upphovsman, Aprendópolis.

För det första upprepar han regeln att ett tal som man multiplicerar med en koefficient ska flyttas över som ett tal man dividerar med, och för det andra förklarar han detta med att man bara kan göra en förändring vid ett tillfälle. Man kan alltså inte både subtrahera och dividera när man flyttar över. Intressant nog ger en annan användare, Young Boys, exakt samma förklaring till en annan frågeställare.

Förklaringen som Aprendópolis och Young Boys ger är intressant eftersom den så tydligt ligger innanför den mer symbolmatematiska diskurs där man löser ekvationer genom att flytta över termer. Regeln att man ska dividera om man flyttar över en koefficient är korrekt, men det går inte att förklara på något bra sätt varför den här regeln stämmer så länge som man inte hänvisar till att man bara får göra sådant som bevarar likheten mellan leden. Till exempel är det fel att dela vänsterledet i ekvationen $2x = 10$ med 2 och högerledet med -2 eftersom man gör olika operationer på respektive sida. Den här förklaringen har ett samband med betydelsen av likhetstecknet och definitionen av en ekvation som förklaringen att man inte får göra två förändringar samtidigt saknar.

7 Diskussion

Liksom jag har nämnt i bakgrunden fyller min undersökning en lucka i forskningen om matematiklärande på internet, eftersom den fokuserar på sociomatematiska aspekter av lärandet i stället för på de rent sociala. Medan till exempel van de Sande (2011) eller Puustinen och Bernicot (2015) undersöker hur forumdeltagares sätt att ställa frågor och svara på varandras inlägg påverkar vad och hur de lär sig, så har jag undersökt hur det sätt på vilket deltagarna i kommentarsfält till Youtubevideor förstår och talar om matematik påverkar vad och hur de lär sig. Jag har kartlagt vilka matematikdiskurser (samförståndsdomäner) som uppträder i filmerna och kommentarsfälten, och i den mån det är möjligt hur dessa matematikdiskurser påverkar elevernas lärande.

Gemensamt för de interaktionsmönster som van de Sande (2011) eller Puustinen och Bernicot (2015) undersöker och för de interaktionsmönster som jag har undersökt är att de både liknar och skiljer sig från sina analoga homologer. Att söka hjälp i ett forum på internet (van de Sande 2011) skiljer sig till exempel från att söka hjälp i en läxhjälpsverkstad genom att den som söker hjälp på internet är mer anonym och inte utsatt för samma sociala tryck att bidra till sitt eget lärande. Diskussionerna i ett kommentarsfält på Youtube skiljer sig från sådana diskussioner i ett klassrum som beskrivs i till exempel Richards (1991) eller Yackel och Cobb (1996), genom att deltagarna i kommentarsfältet i högre grad kommer från miljöer som skiljer sig åt med avseende på de matematikdiskurser som råder där. I analysen framkom även att diskussionerna är mer löst sammanhållna och mindre hierarkiskt styrda, jämfört med diskussionerna i klassrummen.

Resultaten av studien visar att både videornas upphovsmän och deltagarna i kommentarsfälten talar om matematik på flera olika sätt, som är karakteristiska för olika samförståndsdomäner. Den här mångfalden av sätt att tala om matematik återfinns både inom ramen för den enskilda videon och dess kommentarsfält, och bland gruppen av videor om ett visst matematiskt tema, i mitt fall ekvationslösning. Den återfinns också både på en syntaktisk nivå (aritmetik eller algebra) och en semantisk nivå (symbolmatematik eller objektsmatematik). Andelen av dem som tittar på en video som faktiskt kommenterar är visserligen liten, men det är sannolikt att många av dem som tittar läser åtminstone några av kommentarerna även om de inte själva kommenterar.

Det finns också en mångfald av diskussionsformer: ibland sker diskussioner mellan deltagare som har samma nivå på sina förkunskaper, ibland mellan deltagare med olika stora förkunskaper, och ibland mellan frågeställare och videons upphovsmän. Detta är karakteristiskt för undersökande matematik och inte för skolmatematik, liksom Richards (2011) beskriver de olika samförståndsdomänerna. I den här meningen verkar Kellners och Kims (2010) förhoppning att internet skulle skapa en mer jämlik och pluralistisk miljö för lärande förverkligas, åtminstone när det gäller de videor och kommentarsfält som ingår i min studie.

De ansatser till undersökande matematik som Houssart (2001) identifierar bland viskarna i sin studie uppträder verkligen som synliga repliker i kommentarsfälten, även om de är sällsynta och inte utvecklas eller besvaras alltför ofta. Deltagarna i kommentarsfälten utvecklar idéerna i videorna och i andra kommentarer, hittar alternativa metoder, och kommenterar metoder som de ogillar. Ett exempel på hur deltagarna utvecklar idéer är dialogen mellan Zelkrov och TheAmazingWorld ofVidhi, där de hittar en (begränsad) definition av inverser. Flera deltagare föreslår alternativa metoder för ekvationslösning, som till exempel att samla alla variabeltermer på en sida och alla konstanta termer på den andra sidan. Det finns också många som kommenterar nackdelarna med att göra samma operationer på båda sidor (det går långsamt) under filmer där den metoden presenteras, och vice versa under filmer där överflyttningsmetoden presenteras.

Det är oklart i vilken mån som den här öppna och pluralistiska miljön främjar lärande. Å ena sidan visar min studie att diskussioner där alla deltagare kommer från samma samförståndsdomän oftare slutar med att de uttrycker eller visar förståelse, och mer sällan med att de uttrycker eller visar oförståelse. Sådana här diskussioner liknar dem som Richards (1991) beskriver när det gått en tid i det klassrum han undersökte, och eleverna vant sig vid det datorprogram för ekvationslösning och det sätt att tala om handlingar i programmet som han introducerat. Deltagarna hade samma vokabulär som motsvarade kommandon i programmet (till exempel att multiplicera med ett tal på båda sidor om lika med-tecknet), och använde framgångsrikt den här vokabulären när de diskuterade hur de skulle lösa uppgifter.

Å andra sidan har jag också hittat exempel på att deltagarna uttrycker förståelse trots att de i början av dialogen befinner sig i olika samförståndsdomäner. Jämfört med de dialoger som Richards (1991) beskriver verkar deltagarna i de dialoger som jag har undersökt förstå förklaringar från andra samförståndsdomäner bättre och snabbare. Det handlar om deltagare som Jennifer Strehmel som snabbt verkar förstå vad det innebär att verifiera resultatet av en ekvation, eller Tsubasa Tsang som skriver att han förstår en annan deltagares utförliga förklaring om hur man ställer upp en ekvation.

Antagligen beror detta på en kombination av flera faktorer. För det första är det i viss mån en gradfråga om någon befinner sig i en viss samförståndsdomän eller inte, och många av de deltagare som i allmänhet tänker aritmetiskt har förmodligen redan någon erfarenhet av ett algebraiskt tankesätt. Detta gäller också för deltagarna i Richards' studie. För det andra har förmodligen Youtubedialogernas skrivna form betydelse. Deltagarna kan läsa om inlägg tills de känner att de förstår dem, och tvingas inte liksom i ett klassrum hela tiden försöka förstå och svara på nya yttranden och frågor. Det här är ett exempel på Borbas (2005) nya matematik, som karakteriseras av chattformens uttrycksmöjligheter. Diskussionerna sker också i omedelbart sammanhang med videon, och man kan tänka sig att tillgången till en genomgång som deltagarna kan pausa eller spola tillbaka har en betydande effekt på förståelsen. Att undersöka hur deltagarna upplever den skrivna formen är ett intressant ämne för vidare forskning.

För att göra en ansats till att besvara frågan om när och hur deltagarna lär sig är det inte bara intressant att undersöka om deltagarna uttrycker förståelse, utan också hur det här inträffar och vad den uttryckta förståelsen består i. På grund av min studies begränsade omfång är det svårt att dra säkra slutsatser om detta. I de fall som jag har studerat finns det dock några intressanta tendenser. För det första går mycket av aktiviteten i dialogerna ut på att deltagarna skriver ned sina frågor och idéer . Det handlar till exempel om Tzars försök att resonera om betydelsen hos symbolerna i ekvationen för att förstå räkneordningens konsekvenser, eller om Zelkrovs egna definition av en invers. Vissa av deltagarna verkar lära sig genom att fråga och andra verkar lära sig genom att förklara för andra, men båda kategorierna gör detta i dynamiken mellan tanke och skrift. Det här ger fördelar, som att deltagarna kan titta på det de skrivit och bli uppmärksamma på skillnaden mellan det de tänkt, liksom i fallet med Jennifer Strehmel (jämför Borba 2005). Samtidigt skapar också chattformen problem, som den tvetydiga användningen av divisionstecknet "/" efter uttryck med en eller flera termer.

I vissa fall tar diskussionen formen av en mer eller mindre kollaborativ konstruktionsprocess, där deltagarna tillsammans skapar nya regler eller definitioner som fyller ett tomrum i deras förståelse av matematiken. Ofta är det en av deltagarna som tar ledningen, och gör preciseringar som ett resultat av de andra deltagarnas frågor. Ett exempel på detta är dialogen mellan Zelkrov och TheAmazingWorld ofVidhi där den senare skriver ned sin förståelse av Zelkrovs definition och Zelkrov sedan preciserar den. Det liknar de konstruktionsprocesser som Yackel och Cobb (1996) och Cobb et al. (2011) beskriver i sina studier av klassrum med en undersökande matematikkultur.

Intressant nog uppträder detta kollaborativa skapande endast i de dialoger där deltagarna kommer från samma samförståndsdomän. I dialoger där deltagarna kommer från olika samförståndsdomäner verkar frågorna ofta vara för komplexa för att deltagarna ska kunna eller orka reda ut dem. Ett bra exempel är dialogen mellan Aiphiae och Tzar (se avsnitt 6.3.1). Det verkar, med reservation för det lilla underlaget, som att det är enklare för deltagarna att se och komma överens om vad som behöver förklaras när de har en liknande förståelse av matematiken. Det här skulle delvis kunna hänga ihop med att inslag som uttrycker positiva känslor är överrepresenterade i dessa dialoger, en faktor som Lee et al. (2017) visat ha betydelse för lärande i interaktioner på Youtube.

Vad som krävs är antagligen en lärare eller någon annan mer avancerad matematiker som både har de kunskaper och det tålamod som krävs för att hjälpa deltagarna att utveckla sina idéer till tillfredsställande förklaringar. På ett liknande sätt understryker Yackel och Cobb (1996 s. 474) lärarens roll som representant för gemenskapen av människor som ägnar sig åt matematik, och därmed som en förmedlare av sådana normer som gör det möjligt för eleverna att delta i den gemensamma matematiska praktiken.

Samtidigt begränsas konstruktionsprocessen inom ramen för en viss samförståndsdomän, där den åtminstone verkar fungera, av vad som går att uttrycka inom den samförståndsdomänen. Till exempel misslyckas deltagarna i kommentarsfältet till videon *Ecuaciones de primer grado* med att finna en bra förklaring till varför man inte ska byta tecken (ska göra den omvända operationen) när man flyttar över koefficienter, eftersom en sådan förklaring måste hänvisa till relationer mellan matematiska objekt. I allmänhet torde det finnas personer i kommentarsfältet som skulle kunna bidra till en konstruktiv diskussion över gränserna för olika diskurser, men det verkar vara sällsynt att deltagare uppvisar det uthålliga engagemang som i linje med Richards (1991) och Cobb et al. (2011) krävs för att en sådan diskussion ska lyckas. Detta skulle kunna hänga samman med den anonymitet som van de Sande (2011) påvisar, och som enligt henne ofta har en negativ effekt på deltagarnas engagemang.

Jämfört med bland annat Borbas och Zulattos (2006) och Lazarus och Roulets (2013) studier av lärande i mer sammanhållna och mindre anonyma internetmiljöer verkar det som att Youtubeinteraktionerna uppvisar större mångfald men i lägre grad leder till en fördjupning av deltagarnas matematiska förståelse. De funktioner som Youtube har för att främja konstruktiva kommentarer (likes, algoritmer) är inte ändamålsenliga, till skillnad från andra internetgemenskaper som till exempel van de Sandes (2011) hjälpforum eller modererade frågesajter med komplexa anseendesystem som till exempel Stackexchange (math.stackexchange.com). Youtube kan alltså vara ett bra komplement till undervisningen, särskilt för elever vars lärare inte undervisar i värdefulla matematiska praktiker, som till exempel att lösa ekvationer genom att göra samma operationer på båda sidor om lika med-tecknet. Men även om det finns vissa lovande exempel är i allmänhet inte interaktionerna tillräckligt långvariga och av tillräckligt hög kvalitet för att främja långvarigt lärande också över gränsen mellan olika matematikdiskurser.

Den här studien är liksom tidigare nämnts av utforskande karaktär: jag har utvecklat några olika begrepp och kategorier och sett hur de kan användas för att beskriva en miljö där liknande forskning inte gjorts sedan tidigare. Nästa steg vore, i linje med Glasers och Strauss (1967) rekommendationer, att göra en bekräftande studie där dessa kategorier appliceras på ett större material och med ett mer kvantitativt förhållningssätt. Det skulle också vara intressant med kvalitativa undersökningar som försöker komma närmare deltagarna i kommentarsfälten, kanske genom frågeformulär eller intervjuer.

8 Referenser

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspectives and method*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Borba, M. C. (2005). The Transformation of Mathematics in On-Line Courses. I H. L. Chick, & J. L. Vincent, (red.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Band. 2, s. 169-176). Melbourne: PME.

Borba, M. C. & Zulatto, R. B. (2006). Different media, different types of collective work in online continuing teacher education: Would you pass the pen, please. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (red.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Band 2, s. 201-208). Prag: PME

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1989). Young children's emotional acts while engaged in mathematical problem solving. I *Affect and mathematical problem solving*, s. 117-148. New York: Springer.

Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 2–33.

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (red.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, N.J. ; L. Erlbaum Associates.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K. & Gravemeijer, K. (2011). Participating in Classroom Mathematical Practices. I E: Yackel, A. Sfard & K. Gravemeijer, *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb*, s. 117-166. New York: Springer.

Erickson, F. (1980). Timing and context in everyday discourse: Implications for

the study of referential and social meaning. Sociolinguistic Working Paper, 67. Southwest Educational Development Laboratory, Austin.

EU Kids Online (2014) EU Kids Online: findings, methods, recommendations. Hämtad från http://eprints.lse.ac.uk/60512/1/EU%20Kids%20onlinie%20III%20.pdf.

Eysenbach, G. & Till, J. E. (2001). Ethical issues in qualitative research on internet communities. *Biomedical Journal*, *323*(7321), 1103-1105.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine de Gruyter.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Houssart, J. (2001). 'The whisperers': Rival classroom discourses and inquiry mathematics. *For the Learning of Mathematics, 21*(3), 2–8.

Hutchins, E. (1995). *Cognition in the Wild*. Cambridge, MA: MIT Press.

Kear, K. (2004). Peer learning using asynchronous discussion systems in distance education. *Open Learning: The Journal of Open, Distance and e-Learning*, *19*(2), 151-164.

Kellner, D. & Kim, G. (2010). YouTube, critical pedagogy, and media activism. *The Review of Education, Pedagogy, and Cultural Studies*, *32*(1), 3–36.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Knowles, M.S. (1975). *Self-Directed Learning: A Guide for Learners and Teachers.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37*(4), 297-312.

Kramarski, B. & Dudai, V. (2009). Group-metacognitive support for online inquiry in mathematics with differential self-questioning. *Journal of Educational Computing Research*, *40*(4), 377-404.

Lazarus, J. & Roulet, G. (2013). Creating a Youtube-like collaborative environment in mathematics: Integrating animated Geogebra constructions and student-generated screencast videos. *European Journal of Contemporary Education*, *4*(2), 117-128.

Lee, C. S., Osop, H., Goh, D. H.-L., & Kelni, G. (2017). Making sense of comments on Youtube educational videos: A self-directed learning perspective. *Online Information Review*, *41*(5), s. 611-625.

Maturana, H. R. (1978). Biology of language: The epistemology of reality. I G. A. Miller & E. Lenneberg (red.), *Psychology and Biology of Language and Thought*, (s. 27-63). New York: Academic Press.

Mehan, H. (1979). "The Competent Student." Sociolinguistic Working Paper, 61. Southwest Educational Development Laboratory, Austin.

Nunes, T. (2010). Learning outside of school. I V. Aukrust (red.) *Learning and Cognition in Education, (*s. 260-266). Oxford: Academic Press.

Piaget, J. (1970). *L'épistémologie génétique*. Paris: PUF.

Polya, G. (1948). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Purcell, K. (2013, 10 oktober). Online video 2013. Hämtad från Pew Internet and American Life Project: http://pewinternet.org/Reports/2013/Online-video.

Puustinen, M., Bernicot, J., Volckaert-Legrier, O., & Baker, M. (2015). Naturally occurring help-seeking exchanges on a homework help forum. *Computers & Education*, *81*(C), 89–101.

Richards, J. (1991). Mathematical discussions. I E. von Glasersfeld (red.), *Radical constructivism in mathematics education*, (s. 13–51). Dordrecht: Springer.

Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural understanding: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, *91*(1), 175-189.

Rogoff, B. (1997). Evaluating development in the process of participation: Theory, methods, and practice building on each other. I E. Amsel & A. Renninger (red.), *Change and development: Issues of theory, application and method*, s. 265-285. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Salomon, G., & Perkins, D. N. (1998). Individual and social aspects of learning. *Review of research in education*, *23*(1), 1-24.

Tirosh, D. & Almog, N. (1989). Conceptual adjustments in progressing from real to complex numbers. I G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (red). *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 2., s. 221-227). Paris: PME.

Topping, K. J. (2005). Trends in peer learning. *Educational Psychology*, *25*(6), 631-645.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. (M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman, red.). Cambridge, MA: Harvard University Press,.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), s. 458–477.

Yackel, E., Cobb, P. & Wood, T. (1998). The interactive constitution of mathematical meaning in one second grade classroom: An illustrative example. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(4), s. 469-488.

van de Sande, C. (2011). A description and characterization of student activity in an open, online, mathematics help forum. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 53-78.

Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

9 Originalcitat med översättningar

[1] Användaren Abu Eid i kommentarsfältet till videon *Algebra: Linear Equations 1*: ”why did the 4 become 1 and the 40 become 10?” “Varför blev [talet] 4 [talet] 1 och [talet] 40 [talet] 10?”

[2] Användaren Lilandriel i kommentarsfältet till filmen *Algebra: Linear Equations 4*: “Can someone explain why he’s used x+1/1? i get the x+1 bit, but why the 1? why not x+1/2? or even 3? one of the reasons maths throws me is that i just don’t get that sort of arbitrary decision, and it’s really frustrating” ”Kan någon förklara varför han använde x+1/1? jag förstår biten om x+1, men varför 1-an? varför inte x+1/2? Eller till och med 3? en av anledningarna till att matte stör mig är att jag bara inte fattar den sortens godtyckliga beslut, och det är verkligen frustrerande”

[3] Användaren Haider i kommentarsfältet till videon *Algebra: Linear Equations 1*: ”I appreciate your effort but instead of teaching the rules and methods. You have just solved the question without telling what rule to use.” “Jag uppskattar det arbete du lagt ned men istället för att lära ut reglerna och metoderna. Du har bara löst ekvationen utan att säga vilken regel man ska använda”

[4] Användaren Angie i kommentarsfältet till videon *Ecuaciones Lineales*: ”Y como obtienes los = Ósea en la ecuación x+7=28, de donde carajo sacaste el 28, explicarte bn” “Och hur får du tag på dina = alltså i ekvationen x+7=28, var i helvete fick du 28 ifrån, förklara det”

[5] Användaren Karen Mena i kommentarsfältet till videon *Ecuaciones Lineales*: ”porque x+7-7 es Igual A 28 ” “varför är x+7-7 lika med 28”

[6] Användaren Jackie Hernandez i kommentarsfältet till videon *Algebra: Linear Equations 1*: ”Why do you keep changing the numbers?” “Varför ändrar du talen hela tiden?”

[7] Användaren Sedric Suringa i kommentarsfältet till videon *Algebra: Linear Equations 1*: ”why does 6 change into 2 and negative 21 to 7?” “varför förvandlas 6 till 2 och 21 till 7?”

[8] Användaren Andres Sanchez i kommentarsfältet till videon *Ecuaciones Lineales*: ”en lo que tu escribes te plantean una ecuación lineal, quiere decir que x+7=28 lo que tienes que hallar es el valor de la x, en este caso agrupando términos, variables a un lado del =, números enteros al otro lado” “i det som du skriver har man ställt upp en linjär ekvation, det vill säga att [i ekvationen] x+7=28 är det som du måste hitta värdet av x, i det här fallet genom att samla termer, variabler på en sida av =-tecknet, heltal på den andra sidan”

[9] Användaren Rocio Maldonado i kommentarsfältet till videon *Ecuaciones Lineales*: ”al pasar al otro lado de la igualdad” “flyttas över till andra sidan av likheten”

[10] Användaren Aiphiae i kommentarsfältet till videon *Solving more complicated equations*: “Damn math. There has to be a simple explanation for this stuff… I just can’t find the answer or rule that will apply to these things.” ”Jäkla matte. Det måste finnas en enkel förklaring till det här … Jag kan bara inte hitta det svar eller den regel som går att tillämpa på det här.”

[11] Användaren Tzar i kommentarsfältet till videon *Solving more complicated equations*: ”I think it's part logic. I have trouble comprehending it, but my brain is hinting. So 3x+5=17 means There are 3 sets of a number that when combined with 5 they are equal to 17, Both sides are EQUAL in amount. We just don't know what it is, but the symbol does have a value.

So when you think about that you have to think about how subtracting something affects how it's split into different parts, and if you divide something it doesnt. So i believe that theres a good reason for it to be more logical to simply subtract first and then divide it. If you figure it out can you please tell me? Because i don't comprehend why yet sadly, it makes me feel not smart." "Jag tror att det delvis handlar om logik. Jag har svårt att förstå det, men min hjärna ger en vink. Så 3x+5=17 betyder Det finns 3 uppsättningar av ett tal så att när de kombineras med 5 är de lika med 17, Det finns LIKA mycket på båda sidor. Vi vet bara inte vad det är, men symbolen har ett värde. Så när man tänker på det måste man tänka på hur att subtrahera med något påverkar hur det delas upp i olika delar, och när man dividerar något så gör det inte det. Så jag tror att det finns goda skäl för att det skulle vara mer logiskt att helt enkelt först subtrahera och sedan dividera det. Om du kommer på det kan du vara snäll att berätta för mig? För jag förstår tyvärr inte varför än, det får mig att känna mig inte smart."

[12] Användaren Zelkrov i kommentarsfältet till videon *Algebra: Linear Equations 1*: "basically the opposite of a number" "i princip motsatsen till ett tal"

[13] Användaren TheAmazingWorld ofVidhi i kommentarsfältet till videon *Algebra: Linear Equations 1*: "+Zelkrov Oh so basically reciprocal= Negative of a number." "+Zelkrov så inversen är = ett tals negativa motsats"